Elementi di calcolo combinatorio e calcolo delle probabilità

Matteo Gorgone

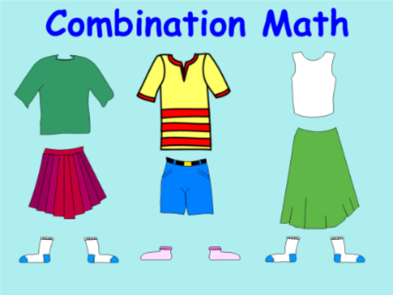
Dipartimento MIFT, Università di Messina
Piano Lauree Scientifiche

"If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize
how complicated life is."

John von Neumann

Calcolo combinatorio

Il Calcolo combinatorio ha per oggetto lo studio delle proprietà dei diversi gruppi che si possono formare, in base a leggi assegnate, con un numero finito di elementi di natura qualunque.



Cenni storici

Le origini di questo ramo dell'analisi risalgono a

- B. Pascal (Traité du triangle arithmtique) scritto nel 1654;
- G. W. Leibniz, al quale si deve la denominazione di Ars Combinatoria;
- J. Wallis;
- B. Frénicle de Bessy;
- J. Bernoulli;
- A. De Moivre.

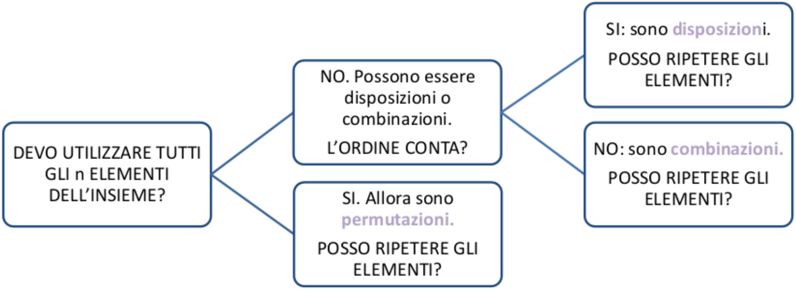
Il calcolo combinatorio, dati n elementi appartenenti ad un insieme, consente di determinare il numero dei modi con cui questi elementi possono essere ridistribuiti in gruppi composti da k elementi.

I raggruppamenti di k elementi possono essere formati da:

- ✎ elementi distinti tra loro: combinazioni semplici;
- ✎ elementi che si ripetono: combinazioni con ripetizione;
- ✎ elementi che differiscono soltanto per l'ordine con cui compaiono gli elementi: disposizioni semplici o con ripetizione;

✎ Se considero tutti gli n elementi dell'insieme, i diversi modi di ordinarli si dicono permutazioni.

Per decidere che forma usare:



Una volta riconosciuto se si tratta di combinazioni, disposizioni o permutazioni, devo sempre chiedermi se posso ripetere gli elementi (con ripetizione) oppure no (semplici).

PERMUTAZIONI (considero tutti gli n elementi)

- In quanti modi possono sedersi 6 persone su 6 poltrone al cinema?
- Quanti sono gli anagrammi della parola MATEMATICA?

DISPOSIZIONI (k elementi su n, l'ordine conta)

- In quanti modi tre persone possono alternarsi sul podio, in un gara con 10 partecipanti?
- Quanti numeri di 5 cifre dispari ci sono?

COMBINAZIONI (k elementi su n, l'ordine non conta)

- In quanti modi posso estrarre a caso due persone per un'interrogazione?
- In quanti modi posso distribuire 10 caramelle uguali a tre bambini?

Problema: Gara di atletica

In quanti modi tre persone possono alternarsi sul podio, in una gara con 10 partecipanti?

Problema: Gara di atletica

In quanti modi tre persone possono alternarsi sul podio, in una gara con 10 partecipanti?

Svolgimento

Su dieci partecipanti, uno arriverà al primo posto. Il secondo e il terzo classificato come potrenno essere scelti?

Problema: Gara di atletica

In quanti modi tre persone possono alternarsi sul podio, in una gara con 10 partecipanti?

Svolgimento

Su dieci partecipanti, uno arriverà al primo posto. Il secondo e il terzo classificato come potrenno essere scelti?
Il secondo classificato potrà essere scelto tra le rimanenti nove persone; il terzo tra le restanti otto.
Pertanto, si hanno

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

possibili podi.

Disposizioni semplici di n elementi a k a k

Supponiamo che ci siano n oggetti distinti da sistemare in k posti. Per occupare il primo posto abbiamo n possibilità; per occupare il secondo avremo $(n-1)$ possibilità per ciascuna di quelle iniziali: quindi i primi due posti possono essere occupati in $n \cdot (n-1)$ modi. Per occupare il terzo posto restano $(n-2)$ oggetti e altrettante possibilità per ciascuna delle precedenti $n \cdot (n-1)$ e così via fino ad esaurire i k posti.

Disposizioni semplici di n elementi a k a k

Tutti i gruppi di k elementi distinti, tratti da un insieme di n elementi distinti, che si distinguono o per almeno un elemento o per l'ordine in cui gli elementi sono considerati formano le disposizioni di n elementi a k a k e si indicano con $D_{n,k}$:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Esercizio

Quante sono le disposizioni semplici degli elementi dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ a 2 a 2?

Esercizio

Quante sono le disposizioni semplici degli elementi dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ a 2 a 2?

Svolgimento

$D_{3,2} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ e precisamente:

$$(1, 2), \quad (1, 3), \quad (2, 1), \quad (2, 3), \quad (3, 1), \quad (3, 2).$$

Problema: I 4 colori

Dato l'insieme formato da 4 colori: $\{bianco, giallo, rosso, verde\}$, quanti gruppi di tre colori si possono formare? (È possibile scegliere più volte i colori)

Problema: I 4 colori

Dato l'insieme formato da 4 colori: $\{bianco, giallo, rosso, verde\}$, quanti gruppi di tre colori si possono formare? (È possibile scegliere più volte i colori)

Svolgimento

Dal momento che ogni elemento scelto per formare un gruppo una volta preso sarà poi rimesso nell'insieme, si avranno

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64 \quad \text{gruppi.}$$

Dall'esempio precedente abbiamo visto che, considerando $n = 4$ elementi e gruppi di $k = 3$ elementi, si ottengono

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k$$

possibili raggruppamenti. Quindi...

Dall'esempio precedente abbiamo visto che, considerando $n = 4$ elementi e gruppi di $k = 3$ elementi, si ottengono

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k$$

possibili raggruppamenti. Quindi...

Disposizioni con ripetizione di n elementi a k a k

Tutti i gruppi di k elementi distinti, tratti da un insieme di n elementi distinti, che si distinguono o per almeno un elemento o per l'ordine in cui gli elementi sono considerati e in cui uno stesso elemento può presentarsi fino a k volte formano le disposizioni con ripetizione di n elementi a k a k e si indicano con $D'_{n,k}$:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Problema: Anagrammi

Quanti anagrammi, anche privi di senso, si possono formare con la parola LIBRO?

Problema: Anagrammi

Quanti anagrammi, anche privi di senso, si possono formare con la parola LIBRO?

Svolgimento

Possiamo scegliere la prima lettera in cinque modi diversi, la seconda in quattro modi, la terza in tre... Pertanto si ottengono

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad \text{anagrammi.}$$

Abbiamo considerato tutti i possibili gruppi di 5 elementi distinti tratti da 5 elementi distinti (le lettere), ovvero

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

con $k = n = 5$.

Permutazioni semplici di n elementi

Tutti i gruppi di n elementi distinti esclusivamente per l'ordine in cui gli elementi sono considerati, formano le permutazioni semplici di n elementi e si indicano con P_n;

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Esempio

Le permutazioni semplici degli elementi dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ sono $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ e precisamente:

$$(1,2,3), \quad (1,3,2), \quad (2,1,3), \quad (2,3,1), \quad (3,1,2), \quad (3,2,1).$$

Inversioni sulle permutazioni

Dati n elementi distinti, si fissi ad arbitrio una delle loro $n!$ permutazioni, chiamandola permutazione principale.
Si dice allora che in una permutazione qualsiasi due elementi, consecutivi o no, presentano una inversione quando in essa si seguono in ordine opposto a quello in cui si trovano nella permutazione principale.
Una permutazione si dice di classe pari o di classe dispari secondo che contiene un numero pari o dispari di inversioni.
Due permutazioni che appartengono ad una medesima classe, oppure a classi diverse, mantengono questa proprietà se si cambia la permutazione principale.

Inversioni sulle permutazioni

Esempio

Fissata la permutazione principale $(1, 2, 3)$,

- la permutazione $(1, 3, 2)$ è di classe dispari;
- la permutazione $(2, 3, 1)$ è di classe pari;
- la permutazione $(2, 1, 3)$ è di classe dispari;
- la permutazione $(3, 1, 2)$ è di classe pari;
- la permutazione $(3, 2, 1)$ è di classe dispari.

Permutazioni con ripetizione di n elementi

Si hanno quando tra gli n elementi ce ne sono m uguali ($m < n$). Per eliminare le permutazioni uguali, bisogna dividere il numero totale delle permutazioni per il numero delle permutazioni degli m elementi uguali:

$$P_n^{(m)} = \frac{n!}{m!}$$

Se tra gli n elementi ce ne sono α identici tra loro, β identici tra loro, γ identici tra loro e così via, risulta:

$$P_n^{(\alpha,\beta,\gamma,\dots)} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! \cdot \dots}$$

Esercizi

In quanti modi si possono sedere 6 persone nei 6 posti di uno scompartimento ferroviario?

In quanti modi si possono sedere 6 persone nei 6 posti di uno scompartimento ferroviario?

Svolgimento

La prima persona può scegliere uno qualunque dei 6 posti, la seconda uno qualunque dei 5 posti rimanenti, la terza uno qualunque dei 4 posti rimanenti, e così via. Dunque il numero dei modi in cui si possono sedere le 6 persone nei 6 posti è dato dalle permutazioni di 6 elementi:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Calcolare quanti anagrammi (anche senza significato) si possono formare con la parola CASSA.

a) 120

b) 30

c) 480

d) nessuna delle risposte precedenti

Calcolare quanti anagrammi (anche senza significato) si possono formare con la parola CASSA.

a) 120

b) 30

c) 480

d) nessuna delle risposte precedenti

Svolgimento

Se tutte le lettere fossero distinte i possibili anagrammi sarebbero le permutazioni di 5 elementi, $P_5 = 5! = 120$. Poiché ci sono lettere ripetute, una permutazione di lettere ripetute non cambia l'anagramma; bisogna quindi dividere le permutazioni di 5 elementi per le permutazioni di 2 elementi (per la lettera "A" ripetuta due volte) e per le permutazioni di 2 elementi (per la lettera "S" ripetuta due volte). Il risultato è quindi

$$\frac{P_5}{P_2 \cdot P_2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{2 \cdot 2} = 30.$$

Tra tutti i numeri di 10 cifre diverse tra loro, quanti sono quelli le cui prime 5 cifre sono dispari?

Tra tutti i numeri di 10 cifre diverse tra loro, quanti sono quelli le cui prime 5 cifre sono dispari?

Svolgimento

Poiché le cifre sono tutte diverse e le prime 5 sono dispari, le ultime 5 cifre devono essere pari. Tutti i possibili gruppi di 5 cifre dispari sono 5! e così tutti i possibili gruppi di 5 cifre pari. Dunque, la risposta è

$$5! \cdot 5! = 14400.$$

Quanti sono gli anagrammi della parola MATEMATICA?

Quanti sono gli anagrammi della parola MATEMATICA?

Svolgimento

Le permutazioni di 10 elementi sono 10!. Poiché ci sono delle lettere ripetute (3 “A”, 2 “M” e 2 “T”) il numero di anagrammi è

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3628800}{24} = 151200.$$

In un autobus vi sono 12 posti numerati. In quanti modi diversi 5 persone possono occuparli?

In un autobus vi sono 12 posti numerati. In quanti modi diversi 5 persone possono occuparli?

Svolgimento

La prima persona può scegliere uno qualunque dei 12 posti, la seconda uno qualunque degli 11 posti rimanenti, . . . , la quinta persona uno qualunque degli 8 posti rimanenti. La risposta è quindi data dalle disposizioni di 12 elementi a 5 a 5:

$$D_{12,5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040.$$

Tra tutti i numeri di 3 cifre, tutte dispari e diverse tra loro, quanti sono i multipli di 5?

Tra tutti i numeri di 3 cifre, tutte dispari e diverse tra loro, quanti sono i multipli di 5?

Svolgimento

I numeri di 3 cifre con le cifre dispari e diverse tra loro sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Infatti, la prima cifra può essere scelta in 5 modi diversi, la seconda cifra in 4 modi diversi e l'ultima cifra in 3 modi diversi. I multipli di 5 sono quelli che hanno l'ultima cifra uguale a 5. Dunque, la prima cifra può essere scelta in 4 modi diversi e la seconda in 3 modi diversi (la cifra “5” è vincolata ad essere l'ultima cifra). La risposta è quindi

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Qualè il numero delle bandiere tricolore a righe verticali che si possono formare con i 7 colori dell'iride?

Qualè il numero delle bandiere tricolore a righe verticali che si possono formare con i 7 colori dell'iride?

Svolgimento

Dobbiamo calcolare il numero di disposizioni semplici di 7 elementi a 3 a 3:

$$D_{7,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Per scommettitori

Quante sono le possibili colonne del totocalcio assegnando gli usuali esiti $\{1, X, 2\}$?

Per scommettitori

Quante sono le possibili colonne del totocalcio assegnando gli usuali esiti $\{1, X, 2\}$?

Svolgimento

Tutte le possibili colonne del totocalcio sono pari alle disposizioni con ripetizione di tre elementi $\{1, X, 2\}$ in tredici posti, ossia

$$D'_{3,13} = 3^{13} = 1594323$$

Quanti numeri di quattro cifre distinte si possono formare con i numeri 1,5,6,8,9?

Quanti numeri di quattro cifre distinte si possono formare con i numeri 1,5,6,8,9?

Svolgimento

Dobbiamo calcolare il numero di disposizioni semplici di 5 elementi a 4 a 4, cioè

$$D_{5,4} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Quanti anagrammi (anche senza significato) si possono formare con la parola ANNA?

Quanti anagrammi (anche senza significato) si possono formare con la parola ANNA?

Svolgimento

Permutazione con ripetizione di 4 elementi:

$$\frac{P_4}{P_2 \cdot P_2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Problema: Le tre carte

Determinare tutti i gruppi di 2 elementi distinti dell'insieme $\{fante, cavallo, re\}$ che si distinguono per almeno uno degli elementi ma non per l'ordine!

Problema: Le tre carte

Determinare tutti i gruppi di 2 elementi distinti dell'insieme $\{fante, cavallo, re\}$ che si distinguono per almeno uno degli elementi ma non per l'ordine!

Svolgimento

Tutte le disposizioni semplici dell'insieme $\{fante, cavallo, re\}$ a 2 a 2 sono $D_{3,2} = 3! = 3 \cdot 2 = 6$ e precisamente:

$$\begin{array}{lll} (fante, cavallo), & (fante, re), & (cavallo, fante), \\ (cavallo, re), & (re, fante), & (re, cavallo). \end{array}$$

Ma ricerchiamo i gruppi che non si distinguono per l'ordine.
Le coppie

$$
\begin{array}{ll}
(fante, cavallo), & (cavallo, fante), \\
(fante, re), & (re, fante), \\
(cavallo, re), & (re, cavallo),
\end{array}
$$

rappresentano a 2 a 2 lo stesso gruppo e si considerano solo una volta. Le combinazioni di 3 elementi presi a 2 a 2 sono

$$C_{3,2} = \frac{D_{3,2}}{P_2} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Determinare tutti i gruppi di 3 elementi distinti dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ che si distinguono per almeno uno degli elementi ma non per l'ordine!

Determinare tutti i gruppi di 3 elementi distinti dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ che si distinguono per almeno uno degli elementi ma non per l'ordine!

Svolgimento

Tutte le disposizioni semplici dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ a 3 a 3 sono $D_{4,3} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ e precisamente:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,2,3), & (1,2,4), & (1,3,2), & (1,3,4), & (1,4,2), & (1,4,3), \\
(2,1,3), & (2,1,4), & (2,3,1), & (2,3,4), & (2,4,1), & (2,4,3), \\
(3,1,2), & (3,1,4), & (3,2,1), & (3,2,4), & (3,4,1), & (3,4,2), \\
(4,1,2), & (4,1,3), & (4,2,1), & (4,2,3), & (4,3,1), & (4,3,2).
\end{array}
$$

Ma ricerchiamo i gruppi che non si distinguono per l'ordine.
Le coppie di ogni riga

$$\begin{array}{cccccc}
(1,2,3), & (1,3,2), & (2,1,3), & (2,3,1), & (3,1,2), & (3,2,1),\\
(1,2,4), & (1,4,2), & (2,1,4), & (2,4,1), & (4,1,2), & (4,2,1),\\
(1,3,4), & (1,4,3), & (3,1,4), & (3,4,1), & (4,1,3), & (4,3,1),\\
(2,3,4), & (2,4,3), & (3,2,4), & (3,4,2), & (4,2,3), & (4,3,2),
\end{array}$$

rappresentano lo stesso gruppo e si considerano solo una volta. Le combinazioni di 4 elementi presi a 3 a 3 sono

$$C_{4,3} = \frac{D_{4,3}}{P_3} = \frac{4!}{3!} = 4$$

Combinazioni semplici di n elementi a k a k

Tutti i gruppi di k elementi distinti, tratti da un insieme di n elementi distinti, che si distinguono per almeno uno degli elementi (ma non per l'ordine!) formano le combinazioni semplici di n elementi a k a k e si indicano con $C_{n,k}$;

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

dove $\binom{n}{k}$ è detto coefficiente binomiale.

Proprietà del Coefficiente Binomiale

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}, \qquad \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Binomio di Newton

Il coefficiente binomiale è così chiamato perché interviene nello sviluppo del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ad es.,

$$(a+b)^4 =$$

Binomio di Newton

Il coefficiente binomiale è così chiamato perché interviene nello sviluppo del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ad es.,

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 =$$

$$=$$

Binomio di Newton

Il coefficiente binomiale è così chiamato perché interviene nello sviluppo del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ad es.,

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Il triangolo di Tartaglia

Dando a n i successivi valori $0, 1, 2, \dots$ e scrivendo su righe successive i corrispondenti coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$, $k \leq n$, si ottiene il cosiddetto triangolo aritmetico di Tartaglia:

$$
\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\dots & & & &
\end{array}
$$

Il triangolo di Tartaglia

Dando a n i successivi valori $0, 1, 2, \dots$ e scrivendo su righe successive i corrispondenti coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$, $k \leq n$, si ottiene il cosiddetto triangolo aritmetico di Tartaglia:

vale a dire

1	riga 0
1 1	riga 1
1 2 1	riga 2
1 3 3 1	riga 3
1 4 6 4 1	riga 4
...	

Combinazioni con ripetizione di n elementi a k a k

Dati n elementi distinti, si dicono combinazioni con ripetizione di classe k (in questo caso può essere anche $k > n$), tutti i gruppi che si possono formare con gli n elementi (in ciascuno dei quali uno stesso elemento può essere ripetuto fino a k volte), in modo che ogni gruppo differisca dagli altri per almeno un elemento o per le ripetizioni con cui un elemento si presenta:

$$C'_{n,k} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} =$$
$$= \binom{n+k-1}{k}.$$

PERMUTAZIONI (considero tutti gli n elementi)

- semplici: $n!$
- con ripetizione: $\dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \ldots}$

DISPOSIZIONI (k elementi su n, l'ordine conta)

- semplici: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$
- con ripetizione: n^k

COMBINAZIONI (k elementi su n, l'ordine non conta)

- semplici: $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- con ripetizione: $\dfrac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$

Esercizi

Quante sono le possibili colonne del Superenalotto?

Quante sono le possibili colonne del Superenalotto?

Svolgimento

Sono pari alle combinazioni semplici di 90 elementi di classe 6, ossia

$$C_{90,6} = \frac{90!}{(90-6)!6!} = 622614630$$

Quanti ambi, terni, quaterne si possono formare con i novanta numeri del lotto?

Quanti ambi, terni, quaterne si possono formare con i novanta numeri del lotto?

Svolgimento

Il numero di ambi diversi sono le combinazioni di 90 elementi a 2 a 2, il numero di terni le combinazioni di 90 elementi a 3 a 3, il numero di quaterne le combinazioni di 90 elementi a 4 a 4:

$$C_{90,2} = \binom{90}{2} = 4005, \qquad \text{Numero di ambi;}$$

$$C_{90,3} = \binom{90}{3} = 117480, \qquad \text{Numero di terni;}$$

$$C_{90,4} = \binom{90}{4} = 2555190, \qquad \text{Numero di quaterne.}$$

Dodici amici, dopo una cena, si salutano ed ognuno di essi stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?

Dodici amici, dopo una cena, si salutano ed ognuno di essi stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?

Svolgimento

La risposta è data dalle combinazioni di 12 elementi a 2 a 2:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = 66.$$

Si mescolano 10 carte e se ne distribuiscono 5 al giocatore A e 5 al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

Si mescolano 10 carte e se ne distribuiscono 5 al giocatore A e 5 al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

Svolgimento

Le combinazioni di 10 elementi a 5 a 5 caratterizzano le carte che riceve il giocatore A; le carte che rimangono sono del giocatore B. La distribuzione può quindi avvenire in

$$C_{10,5} = \binom{10}{5} = 252$$

modi diversi.

Si mescolano 12 carte e se ne distribuiscono 3 al giocatore A, 3 a B, 3 a C e 3 a D. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

Si mescolano 12 carte e se ne distribuiscono 3 al giocatore A, 3 a B, 3 a C e 3 a D. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

Svolgimento

Le combinazioni di 12 elementi a 3 a 3 caratterizzano le carte che riceve il giocatore A, le combinazioni di 9 elementi 3 a 3 le carte che riceve il giocatore B, le combinazioni di 6 elementi a 3 a 3 le carte che riceve il giocatore C. Al giocatore D vanno le carte rimanenti. La distribuzione può quindi avvenire in

$$C_{12,3} \cdot C_{9,3} \cdot C_{6,3} = \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 369600$$

modi diversi.

In quanti modi diversi si possono sistemare in una fila di sedie 5 ragazzi e 6 ragazze, con la condizione che i ragazzi stiano tutti vicini tra loro così come anche le ragazze?

a) $2 \cdot 5! \cdot 6!$

b) $C_{11,2}$

c) $D_{11,2}$

d) $11!$

In quanti modi diversi si possono sistemare in una fila di sedie 5 ragazzi e 6 ragazze, con la condizione che i ragazzi stiano tutti vicini tra loro così come anche le ragazze?

a) $2 \cdot 5! \cdot 6!$

b) $C_{11,2}$

c) $D_{11,2}$

d) $11!$

Svolgimento

Il numero di modi di sistemazione dei 5 ragazzi è dato dalle permutazioni di 5 elementi, mentre il numero di modi di sistemazione dei 6 ragazzi è dato dalle permutazioni di 6 elementi. Infine, poiché si possono sistemare prima i ragazzi e poi le ragazze, o viceversa, il numero dei modi di sistemazione dei 5 ragazzi e delle 6 ragazze è quindi

$$2 \cdot P_5 \cdot P_6 = 2 \cdot 5! \cdot 6! = 2 \cdot 120 \cdot 720 = 172800.$$

Quante stringhe diverse di 10 lettere si possono costruire anagrammando la parola PIANOFORTE (si è interessati a tutti gli anagrammi a prescindere dal fatto che si abbia un significato)

a) $10!$

b) $10!\,3!$

c) $\dfrac{10!}{2!}$

d) nessuna delle risposte precedenti

Quante stringhe diverse di 10 lettere si possono costruire anagrammando la parola PIANOFORTE (si è interessati a tutti gli anagrammi a prescindere dal fatto che si abbia un significato)

a) $10!$

b) $10!\,3!$

c) $\dfrac{10!}{2!}$

d) nessuna delle risposte precedenti

Svolgimento

Se tutte le lettere fossero distinte i possibili anagrammi sarebbero le permutazioni di 10 elementi, $P_{10} = 10! = 3628800$. Poiché ci sono due "O" ripetute, bisogna dividere per le permutazioni di 2 elementi. Il risultato è quindi

$$\frac{P_{10}}{P_2} = \frac{10!}{2!} = \frac{3628800}{2} = 1814400.$$

Utilizzando le cifre 1,2 quanti gruppi di 3 cifre è possibile creare in modo che ogni gruppo si differisca dall'altro per un elemento o per per il numero di ripetizioni di un elemento?

Utilizzando le cifre 1,2 quanti gruppi di 3 cifre è possibile creare in modo che ogni gruppo si differisca dall'altro per un elemento o per per il numero di ripetizioni di un elemento?

Svolgimento

$$C'_{2,3} = \frac{(2+3-1)!}{3!1!} = \frac{4!}{3!} = 4.$$

I gruppi di tre cifre sono

$$(1,1,1), \quad (1,1,2), \quad (1,2,2), \quad (2,2,2).$$

Utilizzando le cifre 1,2,3 quanti numeri di 6 cifre si possono formare?

Utilizzando le cifre 1,2,3 quanti numeri di 6 cifre si possono formare?

Svolgimento

$$D'_{3,4} = 3^6 = 729.$$

Quanti oggetti possiamo differenziare con delle targhe di due simboli di cui il primo è una lettera dell'alfabeto italiano e il secondo è una cifra da 0 a 7?

a) $21 \cdot 7$

b) 29

c) 168

d) 15

Quanti oggetti possiamo differenziare con delle targhe di due simboli di cui il primo è una lettera dell'alfabeto italiano e il secondo è una cifra da 0 a 7?

a) $21 \cdot 7$

b) 29

c) 168

d) 15

Svolgimento

Il primo simbolo si può scegliere in 21 modi diversi e il secondo in 8 modi diversi. Le possibili targhe sono quindi

$$21 \cdot 8 = 168.$$

Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco e il secondo 5 gocce di colore nero. Mischiando tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?

Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco e il secondo 5 gocce di colore nero. Mischiando tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?

Svolgimento

$$C'_{2,5} = \frac{(2+5-1)!}{5!(2-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6.$$

Si possono formare solo 6 colori diversi: bianco, nero e 4 sfumature di grigio.

5 palline rosse, 2 bianche, 3 azzurre devono essere sistemate in fila, se tutte le palline dello stesso colore sono indistinguibili, quante sistemazioni sono possibili?

a) $5! \cdot 2! \cdot 3!$

b) $D_{10,5}$

c) $10!$

d) $\dfrac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!}$

5 palline rosse, 2 bianche, 3 azzurre devono essere sistemate in fila, se tutte le palline dello stesso colore sono indistinguibili, quante sistemazioni sono possibili?

a) $5! \cdot 2! \cdot 3!$

b) $D_{10,5}$

c) $10!$

d) $\dfrac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!}$

Svolgimento

In tutto si hanno 10 palline che possono essere sistemate in $10!$ modi diversi. Poiché le palline dello stesso colore sono indistinguibili, bisogna dividere tale numero per $5! \cdot 2! \cdot 3!$. La risposta è quindi

$$\frac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!} = 2520.$$

Una fabbrica produce confezioni di vernici da un litro ottenute miscelando dieci misurini da un decilitro ciascuno di rosso, giallo e blu. Quante confezioni di vernici vengono prodotte?

Una fabbrica produce confezioni di vernici da un litro ottenute miscelando dieci misurini da un decilitro ciascuno di rosso, giallo e blu. Quante confezioni di vernici vengono prodotte?

Svolgimento

Ogni tipo di vernice prodotta è di fatto una combinazione con ripetizione di $n = 3$ oggetti (i colori base) di classe $k = 10$ (il numero di decilitri indipendenti da miscelare). Con tale procedimento, si possono realizzare

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3+10-1}{10} =$$

$$= \binom{12}{10} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Quanti colori si ottengono miscelando 100 centilitri indipendenti?

Quanti colori si ottengono miscelando 100 centilitri indipendenti?

Svolgimento

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3+100-1}{100} =$$
$$= \binom{102}{100} = \frac{102!}{2!100!} = 5151.$$

Si consideri una data estrazione in una determinata ruota del lotto.
Quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90?

Si consideri una data estrazione in una determinata ruota del lotto. Quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90?

Svolgimento

Sono le combinazioni di 88 elementi presi a 3 a 3:

$$C_{88,3}$$

Quattro giocatori di tennis vogliono giocare un doppio. Quante squadre si possono formare?

Quattro giocatori di tennis vogliono giocare un doppio. Quante squadre si possono formare?

Svolgimento

Sono le combinazioni di 4 elementi presi a 2 a 2:

$$C_{4,2}$$

Un negoziante vuole esporre in una vetrina 4 paia di scarpe scelte tra dieci modelli diversi. In quanti modi (non conta l'ordine) si possono esporre le scarpe all'interno della vetrina?

Un negoziante vuole esporre in una vetrina 4 paia di scarpe scelte tra dieci modelli diversi. In quanti modi (non conta l'ordine) si possono esporre le scarpe all'interno della vetrina?

Svolgimento

Sono le combinazioni di 10 elementi presi a 4 a 4:

$$C_{10,4}$$

In quanti modi si possono disporre le carte di un mazzo di 40?

In quanti modi si possono disporre le carte di un mazzo di 40?

Svolgimento

Sono le permutazioni di 40 elementi :

$$P_{40} = 40!$$

Quante partite di scacchi possono essere giocate da sei giocatori?

Quante partite di scacchi possono essere giocate da sei giocatori?

Svolgimento

Sono le combinazioni di sei elementi a due a due:

$$C_{6,2}$$

7 palline rosse, 5 bianche, 4 azzurre devono essere sistemate in fila. Se tutte le palline dello stesso colore sono indistinguibili, quante sistemazioni sono possibili?

7 palline rosse, 5 bianche, 4 azzurre devono essere sistemate in fila. Se tutte le palline dello stesso colore sono indistinguibili, quante sistemazioni sono possibili?

Svolgimento

$$\frac{16!}{7!5!4!}$$

L'alfabeto italiano contiene 16 consonanti e 5 vocali. Quante stringhe di 6 lettere si possono formare con lettere tutte diverse in modo tale che contengano a e b?

L'alfabeto italiano contiene 16 consonanti e 5 vocali. Quante stringhe di 6 lettere si possono formare con lettere tutte diverse in modo tale che contengano a e b?

Svolgimento

$$C_{6,2} \cdot 2 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$$

In quanti modi diversi possono essere collocati in una libreria 7 libri scelti tra venti?

In quanti modi diversi possono essere collocati in una libreria 7 libri scelti tra venti?

Svolgimento

$$D_{20,7}$$

Supponiamo che il menu di un ristorante consista di 5 antipasti, 6 primi, 6 secondi e 4 dolci: quanti pasti completi (di 4 piatti) possiamo ordinare?

Supponiamo che il menu di un ristorante consista di 5 antipasti, 6 primi, 6 secondi e 4 dolci: quanti pasti completi (di 4 piatti) possiamo ordinare?

Svolgimento

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 720$$

Eventi e loro caratteristiche

Eventi

L'evento si può definire come il verificarsi di un avvenimento, una situazione o un fenomeno.

Un evento può essere:

- certo, se, verificatesi alcune condizioni, il suo realizzarsi è stabilito con assoluta certezza;
- impossibile, quando, data la realizzazione di alcune condizioni, non potrà mai verificarsi;
- aleatorio o casuale, quando, data la realizzazione di alcune condizioni, può verificarsi oppure no.

Eventi

Dato un evento si definisce spazio campionario o degli eventi Ω l'insieme di tutti i possibili risultati di quell'evento.
Si chiama evento ogni sottinsieme $E \subseteq \Omega$, cioè un insieme dei risultati possibili.
In relazione allo spazio campionario, un evento E si dice:

- elementare, se è formato da un solo elemento, $E = \{w\}$ con $w \in \Omega$;
- certo, se $E = \Omega$ cioè se si verifica con assoluta certezza;
- impossibile, se $E = \emptyset$ cioè il suo verificarsi è da escludersi con assoluta certezza;
- composto o non–elementare, se può essere a sua volta scomposto in più eventi elementari.

Lo spazio campionario può essere costituito da

- numero finito di eventi;
- infinità numerabile di eventi (*infinità*, in quanto, l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento casuale è un insieme costituito da un numero infinito di elementi, *numerabile*, in quanto, gli elementi possono essere messi in corrispondenza con gli elementi dell'insieme degli interi non negativi (i quali coincidono con i naturali comprensivi dello zero);
- infinità non numerabile di eventi (*non numerabile*, in quanto non è possibile associare gli elementi del suddetto insieme con gli elementi dell'insieme degli interi non negativi).

Lo spazio campione si definisce

- discreto se è uno spazio finito o infinito numerabile;
- continuo se è uno spazio infinito non numerabile.

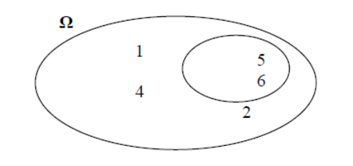
Eventi

Ogni evento può essere identificato come un insieme e rappresentato in tre modi diversi:

- proposizione;
- enumerazione dei casi;
- diagramma di Eulero-Venn.

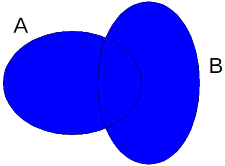
Esempio: lancio di un dado

Sia l'insieme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lo spazio degli eventi.
L'insieme $A =$" Esce un numero maggiore di 4" è equivalente a $A = \{5, 6\}$ oppure alla seguente rappresentazione

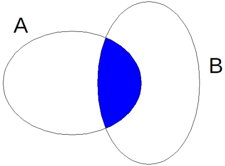


Eventi

- Evento unione: dati due eventi, A e B, l'evento unione $C = A \cup B$ rappresenta l'evento che risulta dal verificarsi degli eventi A o B o entrambi:

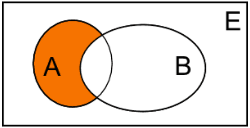


- Evento intersezione: dati due eventi, A e B, l'evento intersezione $C = A \cap B$ rappresenta l'evento che risulta dal verificarsi di entrambi gli eventi A e B:

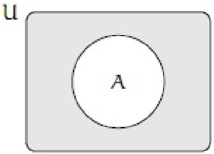


Eventi

- Evento differenza: dati due eventi, A e B, l'evento differenza $C = A \setminus B$ rappresenta l'evento che esclude il verificarsi dell'evento B ma non di A:

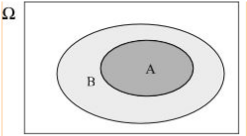


- Evento complementare: dato un evento A, l'evento complementare di A, $\overline{A}$, rappresenta l'evento che esclude il verificarsi di A, in particolare $\overline{A} = \Omega \setminus A$ e $\Omega = A \cup \overline{A}$:



Eventi

- Evento implicazione: dati due eventi, A e B, si dice che A implica B e si indica con $A \subseteq B$, quando dal verificarsi di A segue il verificarsi di B:



- Eventi equivalenti: dati due eventi, A e B, si dicono uguali o equivalenti, e si indica con $A = B$, se A implica B e se B implica A;
- Eventi esaustivi: dati due eventi, A e B, si dicono esaustivi se la loro unione genera l'intero spazio campionario Ω, ovvero $A \cup B = \Omega$.

Eventi

Esempio

Con riferimento al lancio di un dado, sia:
$A =$"Esce un numero maggiore di 3";
$B =$"Esce un multiplo di 2".
Si ha

$$A = \{4, 5, 6\}, \quad B = \{2, 4, 6\}, \quad A \cup B = \{2, 4, 5, 6\},$$
$$A \cap B = \{4, 6\}, \quad A \setminus B = \{5\}, \quad \overline{A} = \{1, 2, 3\}, \quad \overline{B} = \{1, 3, 5\},$$
$$A \not\subseteq B, \quad A \neq B.$$

Eventi

- Eventi incompatibili: eventi tali che il verificarsi dell'uno esclude in modo assoluto il verificarsi dell'altro ($A \cap B = \emptyset$).
- Eventi compatibili: eventi tali che il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro; possono essere dipendenti o indipendenti.
  - Eventi indipendenti: eventi compatibili tali che il verificarsi dell'uno non influenza il verificarsi dell'altro.
  - Eventi dipendenti: eventi compatibili tali che il verificarsi dell'uno influenza il verificarsi dell'altro.

N. B. Questi concetti si possono estendere a un numero finito di eventi.

Eventi

Enunciato	Relazioni
La negazione di un evento certo E è un evento impossibile (è valido anche l'inverso).	$\overline{E} = \phi$ $\overline{\emptyset} = E$
L'unione o l'intersezione di un evento *A* con se stesso è uguale allo stesso evento.	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Le unioni e le intersezioni di eventi sono commutative.	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Le unioni e le intersezioni sono associative.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
L'intersezione in rapporto con l'unione e l'unione in rapporto con l'intersezione sono distributive.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
L'unione di un evento con la negazione dello stesso evento è un evento certo.	$A \cup \overline{A} = E$
L'intersezione di un evento con la negazione dello stesso evento è un evento impossibile.	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Se *E* è un evento certo, $\emptyset$ è un evento impossibile e *A* è un evento casuale abbiamo:	$A \cup E = E; A \cup \emptyset = \emptyset$ $E \cup \emptyset = E; E \cap \emptyset = \emptyset$
Qualsiasi siano gli eventi A e B, abbiamo:	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Considerando gli eventi *A*, *B*, e le loro negazioni $\overline{A}, \overline{B}$ abbiamo : („le leggi di de Morgan”).	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Esercizi

Definire lo spazio degli eventi elementari nei seguenti casi:

- Nel lancio di un dado a sei facce.

Definire lo spazio degli eventi elementari nei seguenti casi:

- Nel lancio di un dado a sei facce.

Svolgimento

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Definire lo spazio degli eventi elementari nei seguenti casi:

- Nel lancio di un dado a sei facce.

Svolgimento

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Nel lancio di una moneta.

Definire lo spazio degli eventi elementari nei seguenti casi:

- Nel lancio di un dado a sei facce.

Svolgimento

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Nel lancio di una moneta.

Svolgimento

$$\Omega = \{Testa,\ Croce\}$$

Definire lo spazio degli eventi elementari nei seguenti casi:

- Nel lancio di un dado a sei facce.

Svolgimento

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Nel lancio di una moneta.

Svolgimento

$$\Omega = \{Testa, \ Croce\}$$

- Nell'estrazione di 10 palline numerate da un'urna.

Definire lo spazio degli eventi elementari nei seguenti casi:

- Nel lancio di un dado a sei facce.

Svolgimento

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Nel lancio di una moneta.

Svolgimento

$$\Omega = \{Testa,\ Croce\}$$

- Nell'estrazione di 10 palline numerate da un'urna.

Svolgimento

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Definire lo spazio degli eventi elementari nel lancio di due dadi a sei facce.

Definire lo spazio degli eventi elementari nel lancio di due dadi a sei facce.

Sono le disposizioni con ripetizione di sei elementi a due a due,

$$D_{6,2} = 6^2 = 36,$$

ovvero,

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\ &(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\\ &(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\\ &(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\\ &(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\ &(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}\end{aligned}$$

Oss. Spesso è impossibile o inutile ai fini dell'esercizio esprimere per esteso lo spazio delle probabilità, l'importante è avere sempre ben chiaro quale esso sia.

Stabilire se i seguenti eventi sono compatibili o incompatibili.

Estraendo una carta dal mazzo

E_1=“Esce una carta di spade”;
E_2=“Esce una carta di coppe”.

Estraendo una carta dal mazzo

E_1=“Esce una figura”;
E_2=“Esce una carta di denari”.

Giocando alla roulette

E_1=“Esce un numero compreso tra 12 e 20”;
E_2=“Esce il colore rosso”.

Analizza i seguenti eventi specificando a quale categoria appartengono.

- Estrarre una pallina rossa da un'urna contenente solo palline rosse;
- Estrarre un jack da un mazzo di carte da poker;
- Esce 8 nel lancio di un dado a sei facce;
- Esce testa nel lancio di una moneta.

Si consideri un mazzo di carte completo dal quale si estrae a caso una carta. Definire lo spazio degli eventi e rappresentare per elencazione e graficamente gli eventi.
$A =$"La carta estratta è un asso",
$B =$"La carta estratta è di cuori",
Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.
Inoltre, rispondi alle seguenti domande:

- A e B sono indipendenti?
- $A \subset B$ o $B \subseteq A$?
- $A = B$?

Si lancino tre monete da 2 euro. Definisci lo spazio degli eventi e gli eventi:

A =“Escono tre teste”,
B =“Esce una testa”,
C =“Esce almeno una testa”,
D =“Esce al più una testa”,
E =“Escono al più tre teste”,
F =“Escono almeno tre teste”.

- Che differenze noti tra gli eventi A, E, F e tra gli eventi B, C, D?
- Che significato puoi attribuire ai termini *almeno* e *al più*?
- Che relazioni intercorrono tra i vari eventi $=$, $\subset$, $\in$, $\cup$, $\cap$?

Si consideri il seguente esperimento: si scelgono tre viti prodotte con una certa macchina e si verifica se le viti sono buone o difettose. Ad ogni vite difettosa si attribuisce il simbolo D e ad ogni vite buona il simbolo B.

$A_1 =$"La prima vite è difettosa;

$A_2 =$"La seconda vite è difettosa";

$A_3 =$"La terza vite è difettosa".

Scrivere la rappresentazione di Ω e degli eventi

$A_1, A_1 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_3, A_2 \cap A_3, A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Calcolo delle probabilità

Cenni storici

Gerolamo Cardano

Gerolamo Cardano (Pavia 24/9/1501, Roma 20/9/1576) è il primo intellettuale nel mondo occidentale a considerare il Calcolo delle Probabilità degno di attenzione (prima di lui esistono solo sporadici accenni ad alcuni problemi sul gioco dei dadi, come nella Summa di Luca Pacioli).
Cardano raccoglie le sue riflessioni sull'argomento in quello che può riguardarsi come il primo trattato della storia, sul calcolo delle probabilità (Liber de ludo aleae, 1524). Non si tratta solo di riflessioni teoriche; Cardano, di umili origini, usò nel gioco d'azzardo le sue scoperte riuscendo a finanziare i propri studi alla scuola medica di Pavia. Egli ebbe chiare le quattro nozioni basilari di quella che stata poi chiamata la teoria classica della probabilità.

Fatti essenziali in merito al concetto di probabilità

- la frequenza con cui si verifica ognuno dei possibili esiti di un esperimento, ripetuto in condizioni controllate (com'è il lancio di un dado), può essere prevista *a priori* con buona approssimazione ricorrendo ad un calcolo matematico che sfrutti le simmetrie implicite nelle modalità dell'esperimento;
- il risultato di questo calcolo è un numero fra 0 e 1, definito probabilità del dato evento, che allo stesso tempo esprime il grado di fiducia che riponiamo nel verificarsi del dato evento e fornisce una buona stima della frequenza per un numero elevato di prove.

Fatti essenziali in merito al concetto di probabilità

- Il passo essenziale per eseguire con successo il calcolo di una probabilità è individuare correttamente gli esiti possibili equiprobabili di un dato esperimento;

  per esempio, nel lancio di due dadi gli esiti possibili della somma sulle due facce sono undici $(2, 3, 4, \dots, 12)$, ma Cardano sapeva che non si tratta di eventi equiprobabili, mentre tali sono i 36 eventi definiti dalle coppie ordinate dei risultati che compaiono sulle facce dei due dadi $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, \dots, (6, 6)$;

- la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi ad esso favorevoli e il numero totale dei casi possibili (purché tutti equiprobabili).

Blaise Pascal e il cavalier De Méré

Intorno al 1654, uno sfaccendato francese dedito al gioco, si accorge che certi eventi, da lui ritenuti più probabili di altri, si verificano in realtà meno spesso di quanto egli si aspetta. Egli conosce un giovane di talento, Blaise Pascal (Clermont 19/6/1623, Port Royal 19/8/1662) che ha stupito con la precocità del suo genio (a 16 anni pubblica un Trattato sulle sezioni coniche, a 18 inventa una macchina calcolatrice, intorno ai 20 pone le basi della statica dei fluidi), un genio destinato tuttavia ad un'altrettanto precoce decadenza psicofisica (poco dopo i 32 anni sprofonderà nella melma delle disquisizioni teologiche, pur conservando lo stile di fine letterato e la vena di polemista mordace, *discetter per lo più di bagattelle stantie come la grazia divina e la salvezza eterna*).

I quesiti del cavalier De Méré

A Pascal il nostro cavaliere invia il seguente quesito:
Se si lanciano 3 dadi, è più probabile che esca la somma 11 o la somma 12?

Pascal, ovviamente, scelse la prima risposta. Invece, secondo il cavaliere, i due eventi hanno le stesse *chances*, dal momento che entrambi si possono formare in 6 soli diversi modi:

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$$
$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4$$

Allora perché l'esperienza al tavolo da gioco mostra che conviene scommettere sull'uscita del numero 11 piuttosto che sul 12?

I quesiti del cavalier De Méré

La risposta è semplice se si tiene conto che la somma è commutativa e quindi, ad esempio, la combinazione $6+4+1$ può verificarsi in 6 modi diversi (tutte le possibili permutazioni), mentre la combinazione $5+5+1$ si può totalizzare in 3 modi diversi $\left(\frac{3!}{2!}\right)$, e la combinazione $4+4+4$ si può realizzare in un solo modo.

Quindi, 11 si può totalizzare in

$$6+6+3+6+3+3=27$$

modi diversi, mentre 12 si può totalizzare in

$$6+6+3+3+6+1=25$$

modi diversi.

Isaac Newton e Samuel Pepys

Circa 40 anni dopo, la storia sembra ripetersi. Un altro nobile sfaccendato, dedito al gioco d'azzardo, con idee ancor più erronee sul calcolo delle probabilità, ma altrettanto coscienzioso nell'annotare i fatti al tavolo da gioco, un certo Samuel Pepys, noto nei circoli londinesi dell'epoca, ha la fortuna di conoscere Isaac Newton (Woolsthorpe 25/12/1642, Londra 20/3/1727), sicché nell'anno 1693 gli sottopone un altro "paradosso":
È più facile ottenere un 6 (almeno uno) lanciando 6 dadi o due 6 (almeno due) lanciandone 12?

Isaac Newton e Samuel Pepys

Newton, after an easy computation, diede la risposta giusta. Ma Mr. Pepys non accettò la conclusione e sfidò Newton a fornire argomenti. Allora Newton gli mostrò i calcoli, ma neanche questo servì a convincerlo; questo ci consente ancora oggi di additarlo ad esempio di testarda ottusità. A sua parziale discolpa, si deve riconoscere che questa ostinazione nel perseverare nei propri errori è tipica nell'ambito del calcolo delle probabilità, la cui storia è costellata di abbagli clamorosi presi anche da personalità insigni (è recente il caso del Paradosso di Monty Hall). La maggior parte di questi errori sono dovuti o all'ambiguità delle formulazioni o all'incapacità di riconoscere la non equiprobabilità degli eventi elementari posti alla base del calcolo; la parte restante a fraintendimenti del significato della cosiddetta legge dei grandi numeri o alla confusione fra probabilità a priori e probabilità a posteriori.

Problema di Monty Hall

Il problema di Monty Hall è un famoso problema di teoria della probabilità, legato al gioco a premi americano Let's Make a Deal. Prende il nome da quello del conduttore dello show, Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall.
Nel gioco vengono mostrate al concorrente tre porte chiuse; dietro ad una si trova un'automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde una capra. Il giocatore può scegliere una delle tre porte, vincendo il premio corrispondente. Dopo che il giocatore ha selezionato una porta, ma non l'ha ancora aperta, il conduttore dello show, che conosce ciò che si trova dietro ogni porta, apre una delle altre due, rivelando una delle due capre, e offre al giocatore la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica porta restante.

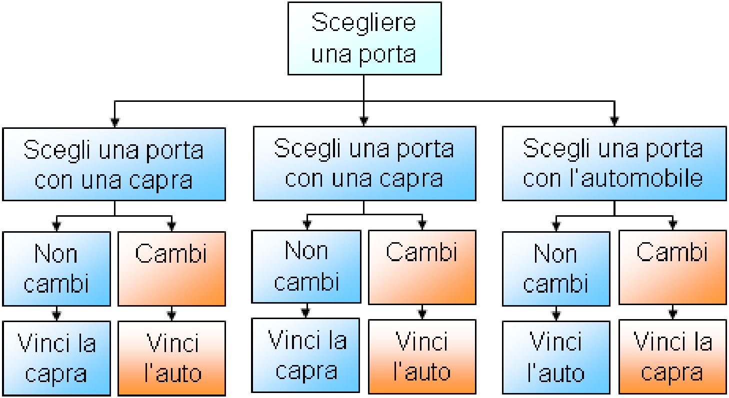
Che fare?

Problema di Monty Hall

Cambiare porta migliora le chance del giocatore di vincere l'automobile? La risposta è SÌ: cambiando, le probabilità di successo raddoppiano passando da

$$\frac{1}{3} \quad \text{a} \quad \frac{2}{3}.$$

Il problema è anche noto come paradosso di Monty Hall, poiché la soluzione può apparire controintuitiva, sebbene non si tratti di una vera antinomia, non generando nessuna contraddizione logica.


Scegliere una porta
Scegli una porta con una capra
Scegli una porta con una capra
Scegli una porta con l'automobile
Non cambi
Cambi
Non cambi
Cambi
Non cambi
Cambi
Vinci la capra
Vinci l'auto
Vinci la capra
Vinci l'auto
Vinci l'auto
Vinci la capra

Definizioni

Classica

Definizione di carattere aprioristico, come rapporto fra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi totali equiprobabili[a].

[a] P.S.Laplace, Théorie analytique des probabilités, Paris (1812)

Frequentista

Definizione basata sul concetto di frequenza relativa[a].

[a] R.von Mises, Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Springer–Verlag, Vienna (1936)

Definizioni

Soggettivista

Definizione come misura di una opinione (poggia su un ragionamento di carattere induttivo)[a].

[a] B.De Finetti, Logos, organo della Biblioteca filosofica di Palermo, anno XIV (1931)

Assiomatica

Definizione assiomatica (richiede la teoria della misura)[a].

[a] A.Kolmogorov, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebn. Math., vol 2, N.3 (1933)

Teoria assiomatica

La probabilità attinente ad un evento A è un numero $P(A)$ assegnato a questo evento che obbedisce ai seguenti tre assiomi:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$ (evento certo).
- Se A e B si escludono a vicenda (eventi incompatibili) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Teoria assiomatica

La probabilità attinente ad un evento A è un numero $P(A)$ assegnato a questo evento che obbedisce ai seguenti tre assiomi:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$ (evento certo).
- Se A e B si escludono a vicenda (eventi incompatibili) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Notazioni abbreviate

- $A \cap B$ corrisponde al verificarsi simultaneo di A e B;
- $A \cup B$ corrisponde al verificarsi di A o di B o di entrambi;
- $A - B$ corrisponde al verificarsi di A ma non di B;
- $A|B$ corrisponde al verificarsi di A, verificatosi già B;
- $\overline{A}$ corrisponde all'evento contrario di A ($\overline{A} = \Omega - A$).

Proprietà

1. La probabilità dell'evento impossibile è
$$P(\emptyset) = 0;$$
2. La probabilità dell'evento complementare è
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$
3. Se A e B sono due eventi qualsiasi, allora
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$
4. Se A e B sono due eventi tali che $A \subseteq B$, allora
$$P(A) \leq P(B).$$

Proprietà – Dimostrazione

1.
$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$
$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

2.
$$A \cup \overline{A} = \Omega \quad \Rightarrow \quad P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Proprietà – Dimostrazione

3

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

perché:

$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ e $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$,

da cui segue:

$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$ e $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$,

da cui eliminando $P(\overline{A} \cap B)$ si ottiene:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Inoltre, $P(A \cap B) \geq 0$, e si ha:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$.

Generalizzazione della probabilità totale per eventi incompatibili

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n eventi tali da formare una partizione dello spazio campionario Ω, ovvero:

- Siano a due a due disgiunti, $(A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j)$;
- La loro unione coincide con Ω, $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega)$.

Allora:

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Esercizi

Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100; calcolare la probabilità che estraendo una pallina si scelga un numero: a) divisibile per 10 o 13; b) divisibile per 10 o 8.

Esercizi

Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100; calcolare la probabilità che estraendo una pallina si scelga un numero: a) divisibile per 10 o 13; b) divisibile per 10 o 8.

- caso a) evento A: numeri divisibili per 10 = 10; evento B: numeri divisibili per 13 = 7; $A \cap B = \emptyset$, allora:

$$P(A) + P(B) = 10/100 + 7/100 = 17/100;$$

Esercizi

Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100; calcolare la probabilità che estraendo una pallina si scelga un numero: a) divisibile per 10 o 13; b) divisibile per 10 o 8.

- caso a) evento A: numeri divisibili per 10 $= 10$; evento B: numeri divisibili per 13 $= 7$; $A \cap B = \emptyset$, allora:

$$P(A) + P(B) = 10/100 + 7/100 = 17/100;$$

- caso b): evento A: numeri divisibili per 10 $= 10$; evento B: numeri divisibili per 8 $= 12$; $A \cap B \neq \emptyset$ (ci sono due numeri in comune), allora:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 10/100 + 12/100 - 2/100 = 1/5.$$

Esercizi

Calcolare la probabilità che lanciando un dado esca il numero 1 o il numero 5.

Esercizi

Calcolare la probabilità che lanciando un dado esca il numero 1 o il numero 5.

Svolgimento

Indichiamo con A l'evento "Esce il numero 1" e con B l'evento "Esce il numero 5". I due eventi sono incompatibili e si ha

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{1}{6},$$

poiché abbiamo un solo caso favorevole su 6 possibili Pertanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Esercizi

Qual è la probabilità che da un mazzo di 40 carte esca un re o una carta di denari?

Esercizi

Qual è la probabilità che da un mazzo di 40 carte esca un re o una carta di denari?

Svolgimento

Indichiamo con A l'evento "Esce un re" e con B l'evento "Esce una carta a denari". I due eventi sono compatibili e si ha

$$P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad \text{poiché i re sono quattro,}$$
$$P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad \text{poiché abbiamo 10 casi favorevoli su 40 possibili,}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{40} \quad \text{cioè la probabilità che gli eventi}$$

si verifichino contemporaneamente.

Pertanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{40} = 0.325$$

Esercizi

La probabilità che un italiano sia pari o più alto di due metri è dello 0.3%. Qual è la probabilità che un italiano sia più basso di due metri?

Esercizi

La probabilità che un italiano sia pari o più alto di due metri è dello 0.3%. Qual è la probabilità che un italiano sia più basso di due metri?

Svolgimento

Consideriamo gli eventi A:"Italiano pari o più alto di due metri" e B:"Italiano più basso di due metri". Sappiamo che $P(A) = 0.3\% = \frac{3}{1000}$. Non avendo altri dati a disposizione l'unico modo per risolvere il problema è osservare che i due eventi sono complementari (in quanto una persona è più alta o più bassa di due metri), quindi

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{1000} = \frac{997}{1000} = 99.7\%$$

N.B. Due eventi complementari sono incompatibili ma due eventi incompatibili non è detto che siano complementari.

Gioco del Lotto

Data un'urna contenente n numeri se ne estraggono m; calcolare la probabilità che tra gli m numeri estratti se ne ottengano k prefissati.

Gioco del Lotto

Data un'urna contenente n numeri se ne estraggono m; calcolare la probabilità che tra gli m numeri estratti se ne ottengano k prefissati.

Svolgimento

Casi equipossibili: sono dati dalle combinazioni di n elementi a gruppi di m:

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Casi favorevoli: si ottengono eliminando dall'urna i k numeri prefissati e considerando le combinazioni che si ottengono da $(n-k)$ elementi presi a gruppi di $(m-k)$

$$C_{n-k,m-k} = \binom{n-k}{m-k} = \frac{(n-k)!}{(m-k)![(n-k)-(m-k)]!} =$$
$$= \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}$$

Gioco del Lotto

Svolgimento

In pratica per i casi favorevoli si suppone che i k numeri prefissati siano elementi fissi che entrano comunque in combinazione con gli altri elementi.
La probabilità sarà il rapporto tra i casi favorevoli e i casi equipossibili:

$$p = \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{m!(n-k)!}{n!(m-k)!}$$

Gioco del Lotto

Svolgimento

In pratica per i casi favorevoli si suppone che i k numeri prefissati siano elementi fissi che entrano comunque in combinazione con gli altri elementi.
La probabilità sarà il rapporto tra i casi favorevoli e i casi equipossibili:

$$p = \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{m!(n-k)!}{n!(m-k)!}$$

Esempio: Calcolare la probabilità che esca un terno sulla ruota di Napoli.

Gioco del Lotto

Svolgimento

In pratica per i casi favorevoli si suppone che i k numeri prefissati siano elementi fissi che entrano comunque in combinazione con gli altri elementi.
La probabilità sarà il rapporto tra i casi favorevoli e i casi equipossibili:

$$p = \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{m!(n-k)!}{n!(m-k)!}$$

Esempio: Calcolare la probabilità che esca un terno sulla ruota di Napoli.

In questo caso, $n = 90$, $m = 5$, $k = 3$, ovvero

$$p = \frac{5!(90-3)!}{90!(5-3)!} = 0.00008512$$

Probabilità condizionata

Assegnato un evento B con probabilità non nulla ($P(B) > 0$) si definisce probabilità dell'evento A condizionata dall'evento B, e si indica con $P(A|B)$, il rapporto fra la probabilità dell'evento $A \cap B$ e quella dell'evento B. In formule:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

cioè la probabilità dell'evento condizionato può essere vista come il rapporto tra i casi favorevoli all'evento intersezione ed i casi favorevoli all'evento condizionante.

Probabilità condizionata

La quantità $P(A|M)$ soddisfa gli assiomi della teoria della probabilità e cioè:

1. $P(A|M) \in [0,1]$;
2. $P(\Omega|M) = 1$;
3. Se $A \cap B = 0$ allora $P((A \cup B)|M) = P(A|M) + P(B|M)$.

Probabilità condizionata

Dimostrazione

1. Dalla definizione di probabilità condizionata come rapporto di quantità positive si deduce che $P(A|M) \geq 0$;
2. Essendo $\Omega \cap M = M$ si ha: $P(\Omega|M) = \frac{P(\Omega \cap M)}{P(M)} = 1$;
3. $$P((A \cup B)|M) = \frac{P((A \cup B) \cap M)}{P(M)} =$$
$$\frac{P((A \cap M) \cup (B \cap M))}{P(M)} = \frac{P(A \cap M) + P(B \cap M)}{P(M)} =$$
$$\frac{P(A \cap M)}{P(M)} + \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = P(A|M) + P(B|M)$$

Eventi Indipendenti

Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

da cui segue che

$$P(A|B) = P(A); \qquad P(B|A) = P(B).$$

Esempio

Da un'urna contenente 17 palline bianche, 8 rosse, 5 verdi, si estraggono successivamente 2 palline. Calcolare la probabilità che entrambe le palline estratte siano bianche nell'ipotesi che: a) dopo la prima estrazione, la pallina estratta viene rimessa nell'urna; b) dopo la prima estrazione, la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.

Esempio

Da un'urna contenente 17 palline bianche, 8 rosse, 5 verdi, si estraggono successivamente 2 palline. Calcolare la probabilità che entrambe le palline estratte siano bianche nell'ipotesi che: a) dopo la prima estrazione, la pallina estratta viene rimessa nell'urna; b) dopo la prima estrazione, la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.

- caso a) evento A: prima pallina bianca $= 17$; evento B: seconda pallina bianca $= 17$; $A \cap B =$ due palline bianche $(n = 17 + 8 + 5 = 30)$, allora:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 17/30 \cdot 17/30 = 289/900 = 0.3211;$$

Esempio

Da un'urna contenente 17 palline bianche, 8 rosse, 5 verdi, si estraggono successivamente 2 palline. Calcolare la probabilità che entrambe le palline estratte siano bianche nell'ipotesi che: a) dopo la prima estrazione, la pallina estratta viene rimessa nell'urna; b) dopo la prima estrazione, la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.

- caso a) evento A: prima pallina bianca $= 17$; evento B: seconda pallina bianca $= 17$; $A \cap B =$ due palline bianche $(n = 17 + 8 + 5 = 30)$, allora:

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 17/30 \cdot 17/30 = 289/900 = 0.3211;$$

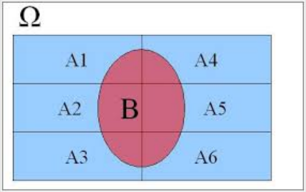
- caso b): evento A: prima pallina bianca $= 17$; evento B: seconda pallina bianca $= 16$; $A \cap B =$ due palline bianche $(n_A = 17 + 8 + 5 = 30,\ n_B = 16 + 8 + 5 = 29)$, allora:

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 17/30 \cdot 16/29 = 272/860 = 0.3126.$$

Teorema della probabilità assoluta

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n eventi tali da formare una partizione dello spazio campionario Ω e sia B un evento arbitrario. Allora

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n).$$



Dimostrazione

Poiché

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n),$$
$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

si può scrivere: $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$ da cui, essendo $P(B \cap A_i) = P(B|A_i)P(A_i)$, si ottiene la probabilità totale.

Esercizi

Siano U_1 un'urna contenente 3 palline bianche e 2 rosse e U_2 un'urna contenente 5 palline bianche ed 1 rossa. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna scelta a caso.

Esercizi

Siano U_1 un'urna contenente 3 palline bianche e 2 rosse e U_2 un'urna contenente 5 palline bianche ed 1 rossa. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna scelta a caso.

- In base al teorema delle probabilità totali si ha che

$$P(B) = P(B|U_1) \cdot P(U_1) + P(B|U_2) \cdot P(U_2);$$

ipotizzando che le due urne abbiano la stessa probabilità di essere scelte, ovvero che $P(U_1) = P(U_2) = 0.5$, allora la probabilità cercata risulta essere

$$P(B) = \frac{3}{5} \cdot 0.5 + \frac{5}{6} \cdot 0.5 = 0.7.$$

Esercizi

In una popolazione il 15% degli individui è a rischio di una certa malattia. Si sa che la probabilità di ammalarsi è pari a 0.2 per i soggetti a rischio e 0.06 per i soggetti rimanenti. Calcolare la probabilità di ammalarsi dell'intera popolazione.

Esercizi

In una popolazione il 15% degli individui è a rischio di una certa malattia. Si sa che la probabilità di ammalarsi è pari a 0.2 per i soggetti a rischio e 0.06 per i soggetti rimanenti. Calcolare la probabilità di ammalarsi dell'intera popolazione.

Lo spazio campionario è dato dagli individui della popolazione. Individuiamo con A l'evento "Si è a rischio di ammalarsi" e con B l'evento "Ci si ammala". Dobbiamo calcolare $P(B)$ sapendo che:

- Il 15% è a rischio di ammalarsi, cioè $P(A) = 0.15$, da cui ne segue che gli individui non a rischio sono l'85%, ovvero: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.85$;
- La probabilità di ammalarsi, sapendo che un soggetto è a rischio è 0.2, cioè $P(B|A) = 0.2$;
- La probabilità di ammalarsi per i soggetti rimanenti è del 0.06, cioè $P(B|\overline{A}) = 0.06$.

Esercizi

Osservando che $A \cap \overline{A} = \emptyset$ e B è un evento che dipende da entrambi, per il teorema della probabilità assoluta:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) =$$
$$= 0.15 \cdot 0.2 + 0.85 \cdot 0.06 = 0.081 = 8.1\%.$$

Ovvero, l'intera popolazione ha l'8.1% di probabilità di ammalarsi.

Teorema di Bayes

Siano A e B due eventi dipendenti. Per il teorema sulla probabilità condizionata si ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

oppure

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Uguagliando ambo i membri si ottiene:

Teorema di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Supposto che si sia verificato l'evento B, tale teorema calcola la probabilità che esso sia stato originato dalla causa A, della quale è nota la probabilità.

Generalizzazione del teorema di Bayes

Teorema di Bayes

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n eventi tali da formare una partizione dello spazio campionario Ω e B un evento qualsiasi, allora

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n)}$$

Dimostrazione

La dimostrazione segue dal fatto che gli eventi A_i sono disgiunti a coppie e formanti un insieme completo di eventi. Infatti, dalla definizione di probabilità condizionata si ha:
$P(A_i \cap B) = P(A_i|B) \cdot P(B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$ da cui si ricava che $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$ e, ricordando il teorema sulla probabilità assoluta, si ottiene il teorema di Bayes.

Esempio sul teorema di Bayes

Si hanno due monete di cui la prima ha una testa ed una croce, mentre la seconda ha una testa su entrambi i lati. Si sceglie a caso una moneta e la si lancia, ottenendo testa come risultato. Qual è la probabilità che si sia scelta la seconda moneta?

Esempio sul teorema di Bayes

Si hanno due monete di cui la prima ha una testa ed una croce, mentre la seconda ha una testa su entrambi i lati. Si sceglie a caso una moneta e la si lancia, ottenendo testa come risultato. Qual è la probabilità che si sia scelta la seconda moneta?

Sia E_1 l'evento "Si è scelta la prima moneta", E_2 l'evento "Si è scelta la seconda moneta", A l'evento "Dopo il lancio si è ottenuta testa" e onde di evitare errori chiediamoci cosa dobbiamo calcolare. Ci si chiede di calcolare la probabilità di aver scelto la seconda moneta sapendo però che dopo il lancio si è ottenuta testa. Dobbiamo calcolare $P(E_2|A)$, per il teorema di Bayes:

$$P(E_2|A) = \frac{P(A|E_2) \cdot P(E_2)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 1/2}{3/4} = \frac{2}{3},$$

in quanto ottenere testa dalla seconda moneta è un evento certo, $P(A|E_2) = 1$, $P(E_2) = \frac{1}{2}$ in quanto abbiamo due possibili scelte e $P(A) = \frac{3}{4}$ in quanto le due monete hanno 4 facce (casi possibili) di cui tre hanno testa (casi favorevoli).

Esempio sul teorema di Bayes

Osservazione.

Avremmo potuto calcolare $P(A)$ ricorrendo al teorema della probabilità assoluta, secondo il quale:

$$P(A) = P(A|E_1) \cdot P(E_1) + P(A|E_2) \cdot P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

in quanto $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$ e $P(A|E_1)$, ovvero la probabilità di ottenere testa lanciando la prima moneta è pari a $\frac{1}{2}$ avendo la prima moneta su una faccia testa e sull'altra croce.

Variabili casuali

Considerando il lancio di due dadi, il risultato che si ottiene sommando le due facce è certamente una variabile.
I valori che essa assume dipendono dal caso ed ognuno di essi si può presentare con una certa probabilità; inoltre il verificarsi di un valore esclude automaticamente il verificarsi di un altro valore (eventi incompatibili).

		2° DADO					
		1	2	3	4	5	6
1° DADO	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Somma Facce	Numero Volte	Probabilità di Verifica
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36

Variabili casuali

Variabile casuale/aleatoria/stocastica

È una variabile che può assumere un certo valore all'interno di un insieme di valori tra loro incompatibili ed aventi ognuno una certa probabilità di verificarsi.

Distribuzione di probabilità

Una distribuzione di probabilità della variabile casuale X è una funzione

$$F(X = x_i) = P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

grafico relativo ad una distribuzione discreta di probabilità

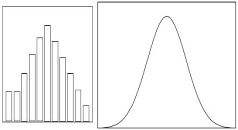


grafico di una distribuzione continua di probabilità

Esercizi

Qual è la probabilità di estrarre un asso oppure un 10 di cuori oppure un 2 di picche da un mazzo di 52 carte?

Qual è la probabilità di estrarre un asso oppure un 10 di cuori oppure un 2 di picche da un mazzo di 52 carte?

Svolgimento

I casi favorevoli sono 6 (4 assi, il 10 di cuori e il 2 di picche) su un totale di 52 casi. La probabilità è quindi

$$\frac{6}{52}.$$

In un'urna vi sono 8 palline bianche e 7 nere. Quante palline nere devo aggiungere affinché la probabilità di estrarre una pallina bianca scenda a 0.4?

In un'urna vi sono 8 palline bianche e 7 nere. Quante palline nere devo aggiungere affinché la probabilità di estrarre una pallina bianca scenda a 0.4?

Svolgimento

Il numero x di palline nere da aggiungere perché la probabilità di estrarre una pallina bianca sia pari a 0.40 è tale da soddisfare la seguente condizione:

$$\frac{8}{x+15} = \frac{4}{10},$$

da cui si ricava che deve essere

$$x = 5.$$

Si effettuano due lanci di una moneta. Qual è la probabilità che si presenti "*testa*" almeno una volta?

Si effettuano due lanci di una moneta. Qual è la probabilità che si presenti "*testa*" almeno una volta?

Svolgimento

I risultati possibili dei due lanci sono

"TT", "TC", "CT" e "CC";

in tre casi su quattro si presenta almeno una volta "T" e quindi la probabilità è $\frac{3}{4} = 0.75$.

Qual è la probabilità di fare ambo, terno, quaterna e cinquina in una estrazione del lotto?

Qual è la probabilità di fare ambo, terno, quaterna e cinquina in una estrazione del lotto?

Svolgimento

Il numero di possibili giocate è

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = 43949268.$$

Poiché si giocano 5 numeri, il numero possibile di giocate con un ambo sono

$$C_{88,3} = 109736.$$

La probabilità di fare un ambo è quindi

$$\frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{109736}{43949268} = \frac{2}{801} = 2.49688 \cdot 10^{-3}.$$

Svolgimento

Analogamente, la probabilità di fare terno è

$$\frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{3741}{43949268} = \frac{1}{11748} = 8.51209 \cdot 10^{-5},$$

la probabilità di fare quaterna è

$$\frac{86}{C_{90,5}} = \frac{86}{43949268} = \frac{1}{511038} = 1.9568 \cdot 10^{-6},$$

e la probabilità di fare cinquina è

$$\frac{1}{C_{90,5}} = \frac{1}{43949268} = 2.27535 \cdot 10^{-8}.$$

Giocando a poker con 32 carte, qual è la probabilità di vedersi servire un poker d'assi?

Giocando a poker con 32 carte, qual è la probabilità di vedersi servire un poker d'assi?

Svolgimento

Tutte le combinazioni di 5 carte estratte da 32 sono

$$C_{32,5} = \binom{32}{5} = 201376.$$

Tutte le combinazioni di poker d'assi sono 28: 4 assi e una carta qualunque tra le rimanenti 28. Dunque, la probabilità di vedersi servire un poker d'assi è

$$\frac{28}{201376} = \frac{1}{7192}.$$

Calcolare la probabilità che, nel poker (Texas Hold'em), il mazziere ci distribuisca una coppia d'assi.

Calcolare la probabilità che, nel poker (Texas Hold'em), il mazziere ci distribuisca una coppia d'assi.

Svolgimento

Il numero dei casi possibili è dato dai raggruppamenti contenenti $k = 2$ elementi distinti che si possono formare partendo da un insieme che ne contiene 52. Pertanto, i casi possibili sono

$$C_{52,2} = \binom{52}{2} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{51 \cdot 52}{2} = 1326.$$

Il numero dei casi favorevoli è dato dal modo di ricevere i $k = 2$ degli $n = 4$ assi presenti nel mazzo, ovvero $C_{4,2} = 6$ modi (l'ordine non ha importanza). Quindi, la probabilità è

$$\frac{6}{1326} = \frac{1}{221} \simeq 0.004.$$

Un'urna contiene 15 palline, delle quali 5 sono bianche, 5 sono blu e 5 verdi. Si calcoli la probabilità che in un'estrazione senza restituzione di 5 palline dall'urna si estraggano 3 palline di uno stesso colore ed una ciascuna degli altri due colori.

Un'urna contiene 15 palline, delle quali 5 sono bianche, 5 sono blu e 5 verdi. Si calcoli la probabilità che in un'estrazione senza restituzione di 5 palline dall'urna si estraggano 3 palline di uno stesso colore ed una ciascuna degli altri due colori.

Svolgimento

Il numero dei casi possibili è dato dal numero di modi in cui si possono estrarre $k = 5$ palline da un'urna che ne contiene 15. Poiché l'ordine con cui vengono estratte non ha importanza e non si ha restituzione, il numero dei casi possibili è

$$C_{15,5} = \frac{15!}{5!10!} = 3003.$$

Per quanto riguarda il numero dei casi favorevoli, essi sono dati dal numero delle possibilità che si hannno per combinare tra loro 3 palline scelte (dello stesso colore) tra 5, una scelta tra 5 e un'altra ancora di colore diverso scelta tra 5.

...

Il tutto andrà moltiplicato per tre in quanto le possibilità sono:

- tre blu, una bianca, una verde;
- tre bianche, una blu, una verde;
- tre verdi, una bianca, una blu.

Poiché non si ha restituzione e l'ordine non conta, i casi favorevoli saranno:

$$3 \cdot C_{5,3} \cdot C_{5,1} \cdot C_{5,1} = 3 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 = 750.$$

Quindi, la probabilità è

$$\frac{750}{3003} \simeq 0.25$$

.

Si lanciano 10 monete. Qual è la probabilità che escano 5 teste?

Si lanciano 10 monete. Qual è la probabilità che escano 5 teste?

Svolgimento

Gli esiti possibili sono le $2^{10} = 1024$ stringhe di 10 simboli scelti nell'insieme $\{T, C\}$. Di queste, le stringhe che contengono 5 teste sono

$$\binom{10}{5} = 252.$$

Infatti, c'è una sola stringa con 10 "T", $10 = \binom{10}{1}$ stringhe con 9 "T", $45 = \binom{10}{2}$ stringhe con 2 "T", ..., $\binom{10}{k}$ stringhe con k "T". La probabilità è quindi

$$\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256} = 0.246094.$$

Si lancia due volte un dado. Calcolare la probabilità che nei due lanci si presenti la stessa faccia.

Si lancia due volte un dado. Calcolare la probabilità che nei due lanci si presenti la stessa faccia.

Svolgimento

Nel primo lancio la faccia che esce non è importante. Nel secondo lancio una sola faccia garantisce il successo. Dunque, la probabilità è $\frac{1}{6}$.

Calcolare la probabilità che lanciando 4 volte una coppia di dadi si realizzi, almeno una volta, il doppio sei.

Calcolare la probabilità che lanciando 4 volte una coppia di dadi si realizzi, almeno una volta, il doppio sei.

Svolgimento

La probabilità che in un lancio si presenti il doppio sei è $p = \frac{1}{36}$ mentre la probabilità che non esca il doppio sei è $q = \frac{35}{36}$. Per semplicità di calcolo conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè che nei quattro lanci non esca mai il doppio sei. Poiché i quattro lanci sono eventi indipendenti, la probabilità che nei quattro lanci non esca mai il doppio sei è:

$$\left(\frac{35}{36}\right)^4 = 0.945216.$$

Dunque, la probabilità che esca nei quattro lanci almeno un doppio sei è

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^4 = 0.054784.$$

4 studenti su 10 vengono esaminati dal docente gli altri dall'assistente. La probabilità di superare l'esame sono 0.6 e 0.8 rispettivamente. Qual è la probabilità che uno studente superi l'esame?

4 studenti su 10 vengono esaminati dal docente gli altri dall'assistente. La probabilità di superare l'esame sono 0.6 e 0.8 rispettivamente. Qual è la probabilità che uno studente superi l'esame?

Svolgimento

Se A è l'evento esame, B è l'evento esame sostenuto con il docente, e C l'evento esame sostenuto con l'assistente, si ha:

$$P(A|B) = 0.6, \qquad P(B) = 0.4, \quad P(A|C) = 0.8, \quad P(C) = 0.6.$$

Applicando il teorema delle probabilità totali, si ha:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|C) \cdot P(C) \\ &= 0.6 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.6 = 0.24 + 0.48 = 0.72. \end{aligned}$$

Sia data un'urna contenente dieci palline numerate da 1 a 10. Potendo estrarre una pallina per volta e supponendo che dopo l'estrazione la pallina venga rimessa nell'urna, calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 seguita dalla pallina numero 6.

Sia data un'urna contenente dieci palline numerate da 1 a 10. Potendo estrarre una pallina per volta e supponendo che dopo l'estrazione la pallina venga rimessa nell'urna, calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 seguita dalla pallina numero 6.

Svolgimento

Sia A l'evento "Esce la pallina numero 5" e l'evento B "Esce la pallina numero 6". A e B sono eventi indipendenti, pertanto

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.01$$

Nel caso in cui la pallina non viene rimessa nell'urna, come si calcola la probabilità precedente?

Sia data un'urna contenente dieci palline numerate da 1 a 10. Potendo estrarre una pallina per volta e supponendo che dopo l'estrazione la pallina venga rimessa nell'urna, calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 seguita dalla pallina numero 6.

Svolgimento

Sia A l'evento "Esce la pallina numero 5" e l'evento B "Esce la pallina numero 6". A e B sono eventi indipendenti, pertanto

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.01$$

Nel caso in cui la pallina non viene rimessa nell'urna, come si calcola la probabilità precedente? In questo caso gli eventi sono dipendenti in quanto l'evento A è influenzato dall'evento B e si ha:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0.011.$$

Un'urna contiene venti palline numerate da 1 a 20. Si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che il numero sorteggiato sia multiplo di 5 o di 7.

Un'urna contiene venti palline numerate da 1 a 20. Si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che il numero sorteggiato sia multiplo di 5 o di 7.

Svolgimento

I multipli di 5 sono 4 (5, 10, 15 e 20), mentre i multipli di 7 sono 2 (7 e 14). Sono eventi incompatibili, pertanto la probabilità è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} = \frac{3}{10} = 0.3.$$

Su 625 alunni di un istituto 225 sono iscritti al centro sportivo e 150 seguono un corso di informatica. Calcolare la probabilità che un alunno sia iscritto al centro sportivo o al corso di informatica nell'ipotesi che nessun alunno svolge entrambe le attività.

Su 625 alunni di un istituto 225 sono iscritti al centro sportivo e 150 seguono un corso di informatica. Calcolare la probabilità che un alunno sia iscritto al centro sportivo o al corso di informatica nell'ipotesi che nessun alunno svolge entrambe le attività.

Svolgimento

Poiché nessun alunno svolge entrambe le attività, il numero di alunni che svolge almeno un'attività è $225 + 150 = 375$. La probabilità che un alunno svolga almeno un'attività è quindi

$$\frac{375}{625} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Siano date due urne U_1 e U_2, la prima delle quali contiene palline bianche in proporzione del 60% mentre la seconda nella proporzione del 70%. Si sa inoltre che l'urna U_1 contiene il triplo delle palline dell'urna U_2. Si mettono in una stessa urna tutte le palline e se ne estrae una. Qual è la probabilità che essa sia bianca?

Siano date due urne U_1 e U_2, la prima delle quali contiene palline bianche in proporzione del 60% mentre la seconda nella proporzione del 70%. Si sa inoltre che l'urna U_1 contiene il triplo delle palline dell'urna U_2. Si mettono in una stessa urna tutte le palline e se ne estrae una. Qual è la probabilità che essa sia bianca?

Lo spazio campionario è dato da tutte le palline che possono essere estratte, bianche o non bianche. Detto B l'evento "Si estrae una pallina bianca", dobbiamo calcolare $P(B)$ sapendo che $P(B|U_1) = 0.6$ e $P(B|U_2) = 0.7$.
Inoltre, poiché la prima urna contiene il triplo di palline della seconda, sul totale delle palline il 75% saranno della prima urna e il restante 25% della seconda, cioè:

$$P(U_1) = 0.75, \qquad P(U_2) = 0.25.$$

Per il teorema della probabilità assoluta

$$P(B) = P(B|U_1) \cdot P(U_1) + P(B|U_2) \cdot P(U_2) = 0.6 \cdot 0.75 + 0.7 \cdot 0.25 = 0.625.$$

Nel gioco del lotto calcolare la probabilità che, nelle prime due estrazioni, vengano fuori due numeri multipli di 5.

Nel gioco del lotto calcolare la probabilità che, nelle prime due estrazioni, vengano fuori due numeri multipli di 5.

Svolgimento

Indicato con A l'evento "Il primo numero estratto è un multiplo di 5" e con B l'evento "Il secondo numero estratto è un multiplo di 5", dobbiamo calcolare $P(A \cap B)$. Poiché i due eventi sono dipendenti si ha:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Fra 1 e 90 i multipli di 5 sono 18, pertanto

$$P(A) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}, \qquad P(B|A) = \frac{17}{89},$$

in quanto nella seconda estrazione le palline tra cui estrarre si riducono a 89, mentre i casi favorevoli scendono a 17. Quindi,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{17}{89} \simeq 0.038.$$

Scommessa

Ad una festa (in cui non ci sono 4 gatti, ma neanche tantissime persone) conviene scommettere sul fatto che ci sono almeno due persone che fanno il compleanno lo stesso giorno?

Il problema collegato a questa scommessa prende il nome di paradosso del compleanno.

Paradosso del compleanno

Il paradosso del compleanno è un paradosso di teoria della probabilità definito nel 1939 da Richard von Mises. Il paradosso afferma che la probabilità che almeno due persone in un gruppo compiano gli anni lo stesso giorno è largamente superiore a quanto potrebbe dire l'intuito: infatti già in un gruppo di 23 persone la probabilità è circa 0.50; con 30 persone essa supera 0.70, con 50 persone tocca addirittura 0.97, anche se per arrivare all'evento certo occorre considerare un gruppo di almeno 367 persone (per il principio dei cassetti e la possibilità di anni bisestili).

Calcolo

Per effettuare il calcolo, si ricorre alla formula per la probabilità degli eventi indipendenti: per rendere più semplice il calcolo si assume che gli anni siano tutti di 365 giorni e che i compleanni siano equiprobabili, anche se ciò non è esatto. Aggiungere il giorno bisestile peggiora leggermente la probabilità, ma in compenso il fatto che i compleanni non siano equiprobabili la alza.

Il modo più semplice per calcolare la probabilità $P(n)$ che ci siano almeno due persone appartenenti ad un gruppo di n persone che compiano gli anni lo stesso giorno è calcolare dapprima la probabilità $P_1(n)$ che ciò non accada.

Calcolo

Data una qualunque persona del gruppo (indipendentemente dalla data del suo compleanno), vi sono 364 casi su 365 in cui il compleanno di una seconda persona avvenga in un giorno diverso; se si considera una terza persona, ci sono 363 casi su 365 in cui compie gli anni in un giorno diverso dalle prime due persone e via dicendo. Esprimendo in formule quanto sopra, la probabilità che tutti i compleanni cadano in date diverse è:

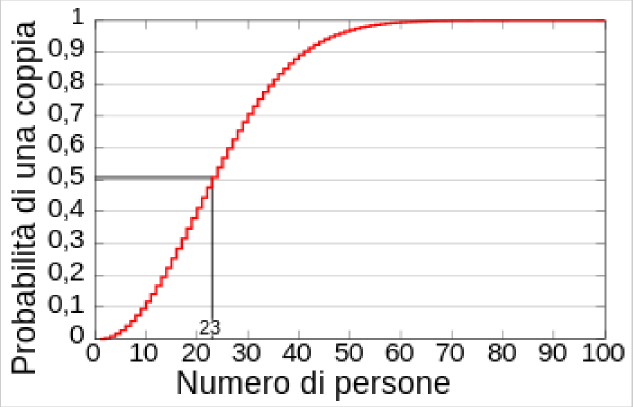
$$\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365} = \frac{364!}{365^{n-1}(365-n)!}.$$

Dunque, la probabilità dell'evento complementare, cioè che esistano almeno due compleanni uguali, è

$$1 - \frac{364!}{365^{n-1} \cdot (365-n)!}.$$

Per $n = 23$ questa probabilità supera già il 50%.

Paradosso del compleanno – Grafico



Il grafico mostra l'andamento di *P(p)* al crescere del numero di persone