

La Modellistica Matematica e le Scienze del Mare

Francesco Oliveri



Dipartimento MIFT, Università di Messina

SEA IN SHELL

Campus Scienze – 24/09/2021



Cos'è un Modello Matematico?

Un modello matematico è una **costruzione formale** utile a trattare un problema o un fenomeno che con soli ragionamenti qualitativi, anche usando la logica, non si può risolvere.

Costruzione di un modello

Ci sono alcune fasi standard per la costruzione di un modello matematico di un fenomeno:

- 1 Osservazione del fenomeno.
- 2 Identificazione delle variabili utili a descrivere il fenomeno.
- 3 Ipotesi delle relazioni di causa–effetto tra le variabili descrittive del fenomeno.
- 4 Implementazione del modello.
- 5 Validazione del modello: scelta dei valori dei parametri, conseguenze del modello, confronto dei risultati teorici con quelli sperimentali (e ritorno al punto (2) se le discrepanze non sono accettabili).

Avvertenze

- 1 I problemi concreti sono in generale troppo complessi: molte variabili in gioco, relazioni complesse e non sempre completamente note, ...
- 2 È quindi necessario semplificare il problema, privilegiando alcune variabili particolarmente significative e simulando opportunamente le interazioni. Un modello troppo complicato può essere intrattabile dal punto di vista matematico!
- 3 All'estremo opposto, un modello matematico non può essere troppo semplice.
- 4 Un modello matematico, anche se fornisce previsioni accurate, **non è il fenomeno!**



La Matematica e le altre Scienze

Storicamente, è la Fisica ad essere stata **matematizzata**: con Galileo, e soprattutto Newton, la Fisica (o, come veniva chiamata, la Filosofia Naturale) ha attinto a piene mani dalla Matematica, fornendo anche spunti per sviluppare nuove aree della Matematica (si pensi ad esempio al calcolo differenziale e integrale).

La pervasività della Matematica in ogni ambito scientifico e umanistico è sotto gli occhi di tutti: in Chimica, in Biologia, in Medicina, nelle Scienze Economico-Sociali, in Filologia, ...

Vediamo come la Matematica è entrata nell'Ecologia: e qui il mare ha avuto il suo ruolo.



Nascita dell'Ecologia Matematica (1926)



Vito Volterra e Umberto D'Ancona.

Vito Volterra

Vito Volterra (1860–1940) era un matematico abbastanza famoso (anche senatore del Regno dal 1906) quando incontrò lo zoologo Umberto D'Ancona che divenne poi suo genero (ne sposò la figlia Luisa Volterra).

I fatti

D'Ancona era incuriosito dalle fluttuazioni delle quantità di pesce nei mercati ittici di Trieste.

Dividendo i pesci in prede e predatori, si potevano osservare delle oscillazioni accoppiate nelle loro quantità (che in qualche modo erano legate alle quantità di pesci in mare).

Un altro fenomeno che sembrava strano era che i pesci predatori sembravano avvantaggiati rispetto alle prede nei periodi in cui la pesca era sospesa o più difficile (durante la prima guerra mondiale).



1926: nasce l'Ecologia Matematica

L'analogia con le oscillazioni presenti in un modello studiato da Volterra portarono quest'ultimo a pubblicare nel 1926 due lavori:

- ① "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi", nelle Memorie dell'Accademia dei Lincei;
- ② "Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically", su Nature.

Nel 1927 fu pubblicata nel *Regio Comitato Talassografico Italiano* una seconda edizione della monografia di Volterra. Qui Volterra considerò altri tipi di interazioni ecologiche (cooperazione, competizione).

Volterra fu uno dei 12 professori universitari che rifiutarono il giuramento di fedeltà al fascismo.

Nel 1942 D'ancona pubblicò il libro "*La lotta per l'esistenza*", ispirato dal lavoro di Volterra.



L'interazione tra Volterra e D'Ancona

Così Volterra introduceva le sue *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte sur la vie* del 1931.

À la suite de conversations avec M. D'Ancona, qui me demandait s'il était possible de trouver quelque voie mathématique pour étudier les variations dans la composition des associations biologiques, j'ai commencé mes recherches sur ce sujet à la fin de 1925.

Umberto d'Ancona (1896-1964), prima direttore dei servizi della pesca ad Ancona, poi biologo all'università di Siena, aveva un interesse suggerito da alcune statistiche sulla pesca nei porti del Nord Adriatico. I dati relativi al periodo 1905-1923 indicavano come, all'interno del pescato, la percentuale dei pesci **appartenant à la classe des Sélaciens** — i predatori — aumentasse considerevolmente negli anni della guerra (e in quelli immediatamente successivi).



L'interazione tra Volterra e D'Ancona

Si trattava di comprendere e giustificare questo incremento, dato che la sua dipendenza unicamente da cause esterne — in questo caso la minore attività di pesca, dovuta allo scoppio della guerra — non risultava del tutto convincente.

Perché l'incremento riguardava solo i predatori, la **classe des Sélaciens qui, particulièrement voraces, se nourrissent d'autres poissons?**

Come spiegare le statistiche per cui **une diminution dans l'intensité de la destruction favorise les espèces les plus voraces?**



Il modello di Lotka–Volterra

Il fenomeno delle oscillazioni accoppiate nella dinamica preda-predatore era stato osservato nei dati della *Compagnia della Baia di Hudson* (linci e lepri: i numeri delle popolazioni venivano stimati sulla base delle pellicce in vendita!) Volterra spiegò queste oscillazioni in maniera semplice anche se non fu l'unico perché Alfred Lotka (demografo ucraino) nel 1924 pervenne allo stesso modello nel 1924 con la monografia "Elements of physical biology". Volterra propose il suo modello indipendentemente (non c'era Internet, e le comunicazioni non erano veloci):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) - px(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon px(t)y(t) - my(t).\end{aligned}$$



Il modello di Lotka–Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) - px(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon px(t)y(t) - my(t),\end{aligned}$$

dove:

- $x(t)$ è la densità della preda al tempo t ;
- $y(t)$ è la densità del predatore al tempo t ;
- la costante r è il tasso costante di crescita della preda (crescita malthusiana);
- la costante m il tasso costante di mortalità del predatore;
- la costante p è il tasso di predazione;
- $\varepsilon < 1$ il tasso di conversione della biomassa della preda nella biomassa del predatore.



Il modello di Lotka–Volterra

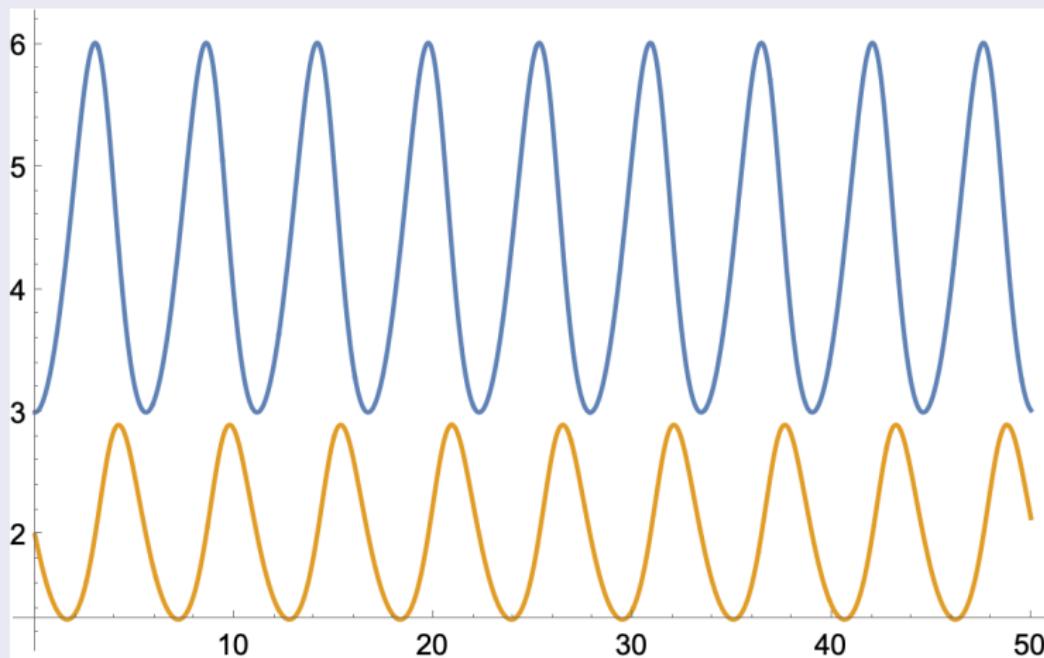
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) - px(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon px(t)y(t) - my(t).\end{aligned}$$

Alcune semplici conseguenze:

- se non ci sono predatori, $y(t) \equiv 0$, la preda aumenta esponenzialmente nel tempo, $x(t) = x_0 \exp(rt)$;
- se non ci sono prede, $x(t) \equiv 0$, i predatori si estinguono esponenzialmente, $y(t) = y_0 \exp(-mt)$;
- se $x(t)$ e $y(t)$ sono diverse da zero, il predatore limita la crescita incontrollata della preda, e la preda evita di far estinguere il predatore.



Il modello di Lotka–Volterra



Soluzione del modello di Lotka–Volterra: oscillazioni delle prede e dei predatori.

Il modello di Lotka–Volterra

Il sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) - px(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon px(t)y(t) - my(t)\end{aligned}$$

va risolto con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

Ci sono delle particolari condizioni iniziali per cui il sistema rimane congelato: cioè, non ci sono oscillazioni.

Sono i cosiddetti punti di equilibrio:

$$x_0 = \frac{m}{\varepsilon p}, \quad y_0 = \frac{r}{p}.$$



Il modello di Lotka–Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) - px(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon px(t)y(t) - my(t).\end{aligned}$$

I punti di equilibrio

$$x_0 = \frac{m}{\varepsilon p}, \quad y_0 = \frac{r}{p}$$

hanno un preciso significato:

le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono periodiche con un certo periodo T ; se calcoliamo i valori medi delle prede e dei predatori su un periodo, questi sono uguali ai punti di equilibrio, cioè:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt = \frac{m}{\varepsilon p},$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt = \frac{r}{p}.$$

Il modello di Lotka–Volterra

Introduciamo un effetto dovuto alla pesca:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) - px(t)y(t) - \alpha x(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon px(t)y(t) - my(t) - \beta y(t).\end{aligned}$$

In questo caso, i punti di equilibrio diventano

$$x_0 = \frac{m + \beta}{\varepsilon p}, \quad y_0 = \frac{r - \alpha}{p},$$

e si capisce che la pesca fa aumentare il valore di equilibrio delle prede e diminuire il valore di equilibrio dei predatori!

Il modello, pur nella sua semplicità, spiega come la pesca danneggi di più la specie più in alto nella catena alimentare.



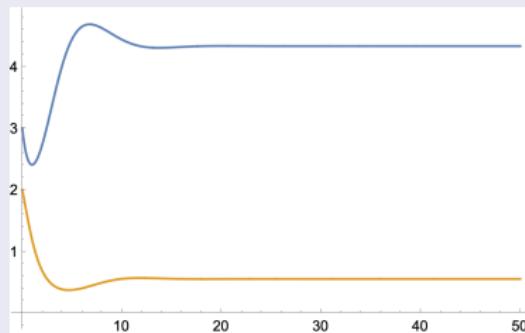
Lotka–Volterra con correzione logistica

Il modello di Lotka–Volterra, oltre che semplice, è in un certo senso sbagliato. Infatti, si tratta di un modello non dissipativo (cosa che configge con il secondo principio della termodinamica).

La crescita malthusiana delle prede in assenza di predatori non è credibile.

È necessaria una qualche correzione, per esempio una massima capacità dell'ambiente nei riguardi delle prede, usando una crescita logistica delle prede (ipotesi più ragionevole). Il problema è che si perdono le oscillazioni e l'evoluzione tende ad un equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - px(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon px(t)y(t) - my(t).\end{aligned}$$



Specie in competizione

Considerando due specie in competizione, un modello semplice è

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1(h_1 N_1(t) + h_2 N_2(t))) N_1(t),$$
$$\frac{dN_2(t)}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2(h_1 N_1(t) + h_2 N_2(t))) N_2(t),$$

dove $N_1(t)$ e $N_2(t)$ rappresentano i numeri degli individui delle due specie.

I parametri (tutti positivi) sono:

- ε_1 e ε_2 , potenziali biologici delle due specie;
- h_1 e h_2 , che danno una misura dell'occupazione della nicchia ecologica da parte di ciascun individuo delle due specie;
- γ_1 e γ_2 , che tengono conto della riduzione del potenziale biologico dovuta alla co-presenza delle due specie.



Specie in competizione

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1(h_1 N_1(t) + h_2 N_2(t))) N_1(t),$$
$$\frac{dN_2(t)}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2(h_1 N_1(t) + h_2 N_2(t))) N_2(t).$$

Nonostante la semplicità, questo modello è in grado di descrivere un principio fondamentale dell'ecologia, il **principio di esclusione biologica**:

Due specie distinte non possono occupare a lunga scadenza la stessa nicchia ecologica, ma necessariamente una delle due specie si estingue mentre l'altra tende a saturare la nicchia.

Questo principio è noto anche come **principio di Lotka-Volterra**.



Modelli sempre più complessi

La modellizzazione in ecologia si è arricchita enormemente negli anni con l'introduzione di:

- l'implementazione di modelli (più realistici) **dissipativi**;
- l'inclusione di fenomeni di diffusione delle specie (che non sono omogeneamente distribuiti nello spazio): equazioni a derivate parziali;
- l'introduzione di modelli a tempo discreto;
- l'inclusione (essenziale in ambiente marino) di fenomeni di trasporto più o meno passivo delle specie da parte dell'ambiente.

Per esempio, un modello generale per la dinamica di N specie di plankton model potrebbe essere rappresentato da un sistema di equazioni di advezione–reazione–diffusione:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = - \underbrace{J(\psi, c_i)}_{\text{advection}} + \underbrace{f_i(c_1, \dots, c_i, \dots, c_N)}_{\text{reaction}} + \underbrace{D_i \Delta c_i}_{\text{diffusion}}$$

dove c_i è la concentrazione della i -esima specie planktonica, ψ è un'assegnata *stream function*, e i parametri D_i sono dei coefficienti di diffusione.

Un modello discreto

Consideriamo un semplice (si fa per dire) modello discreto Lagrangiano su un reticolo piano che accoppia l'interazione preda–predatore di due specie planktoniche con effetti diffusivi e un trasporto dovuto alle correnti marine. Le caratteristiche generali del modello sono le seguenti:

- 1 Genericità: si assumono interazioni generiche;
- 2 Tempo discreto;
- 3 Spazio discreto: usiamo un reticolo di celle per rappresentare una porzione di oceano;
- 4 Condizioni al contorno circolari, per simulare una periodicità spaziale dei processi.



Le equazioni del modello

- Interazione tra preda ($P(t)$) e predatore ($Z(t)$) in ciascuna cella (di coordinate (x, y)) del reticolo spaziale:

$$P(t+1) = P(t) \exp(r(1 - P(t)) - Z(t)), \\ Z(t+1) = cP(t)Z(t).$$

- Diffusione delle due specie:

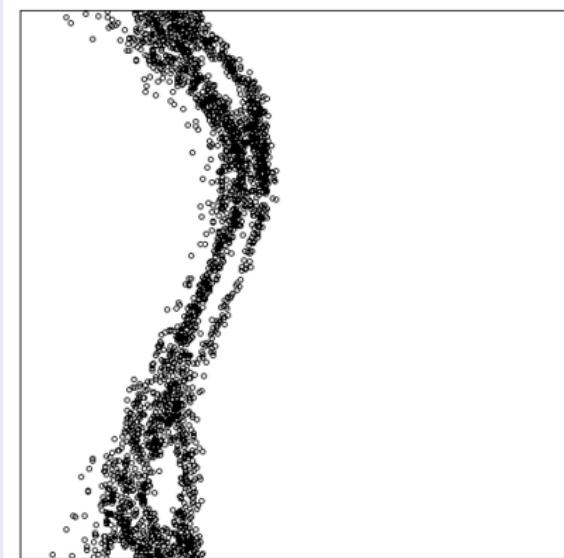
$$P'_{(x,y)}(t) = (1 - D_p)P_{(x,y)}(t) + D_p\bar{P}_{(x,y)}(t), \\ Z'_{(x,y)}(t) = (1 - D_z)Z_{(x,y)}(t) + D_z\bar{Z}_{(x,y)}(t),$$

dove D_p e D_z sono i coefficienti di diffusione, $\bar{P}_{(x,y)}(t)$ e $\bar{Z}_{(x,y)}(t)$ sono le medie delle due specie nelle 8 celle che circondano la cella (x, y) .

- Trascinamento ad opera della corrente (per $K = 1$ il mescolamento è caotico!):

$$x(t+1) = x(t) + K \sin(y(t)) \quad \text{mod } 2\pi, \\ y(t+1) = y(t) + x(t+1) \quad \text{mod } 2\pi.$$

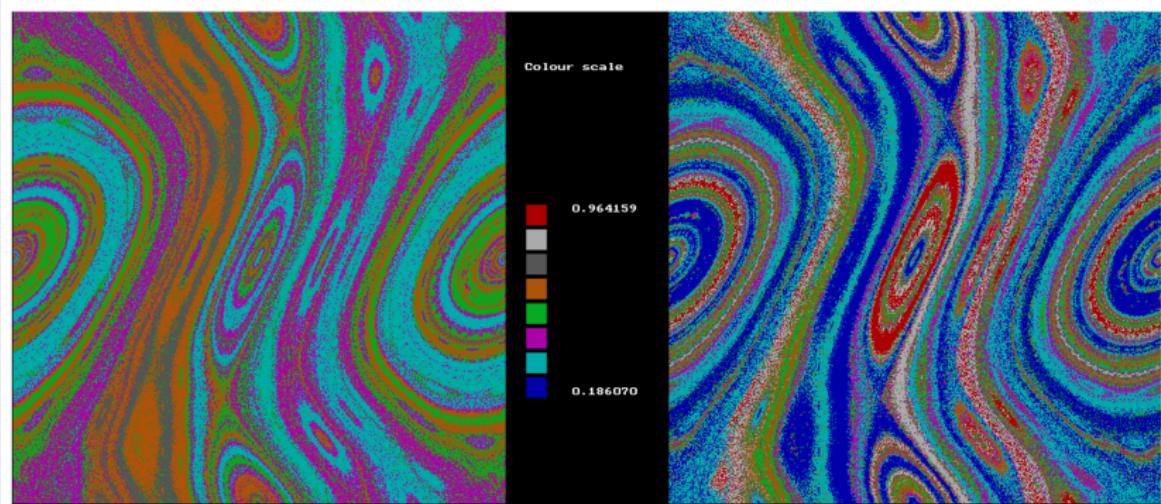
Advezione



Distribuzione di particelle a causa del trascinamento passivo dovuto alle correnti.

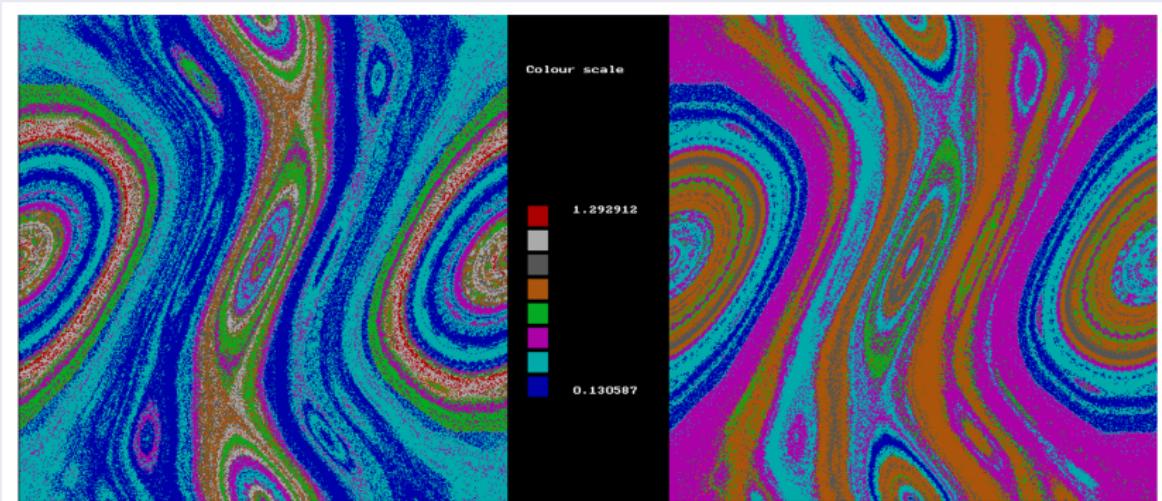


Simulazione del modello



Distribuzione spaziale delle prede (sinistra) e dei predatori (destra) con i parametri: $r = 0.7$, $c = 2.1$, $D_p = 0.009$, $D_z = 0.02$.

Simulazione del modello



Distribuzione spaziale delle prede (sinistra) e dei predatori (destra) con i parametri: $r = 2.86$, $c = 2.5$, $D_p = 0.09$, $D_z = 0.2$.