Capitolo 4

Tecnica dei coefficienti indeterminati

In questo Capitolo, vedremo come i metodi numerici, introdotti nel Capitolo precedente, e le formule di quadratura possano essere dedotti utilizzando un approccio alternativo alla formula di Taylor. Inoltre, usando lo stesso approccio, deriveremo le piú famose formule di quadratura.

4.1 Formule alle differenze finite

Per motivare l'argomento della presente sezione, supponiamo di dover risolvere un problema ai valori al contorno governato da una equazione differenziale del secondo ordine. A tal fine possiamo scegliere fra diverse classi di metodi: differenze finite, elementi finiti, spettrali e altri. La scelta piú semplice e la piú datata é, certamente, un metodo alle differenze finite. Essendo il problema del secondo ordine dovremo approssimare la derivata seconda con una formula alle differenze finite. A tal fine useremo tre nodi adiacenti e cioé, supposta $u(x)$ la soluzione, i nodi x_{k-1}, x_k, x_{k+1} equidistanti ossia $\Delta x = x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}$. La formula alle differenze avrá quindi l'espressione

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_k) \approx A_0 u_{k-1} + A_1 u_k + A_2 u_{k+1}\ , \tag{4.1}$$

dove A_0, A_1 e A_2 sono costanti da determinare. Per determinarne i valori, imporremo che la formula (4.1) sia esatta per i polinomi della base canonica $1, x$ e x^2. Imponendo tali condizioni otterremo il sistema lineare di Cramer:

$$\begin{aligned} &A_0 + A_1 + A_2 = 0 \\ &A_0 x_{k-1} + A_1 x_k + A_2 x_{k+1} = 0 \\ &A_0 x_{k-1}^2 + A_1 x_k^2 + A_2 x_{k+1}^2 = 2\ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Il determinate della matrice dei coefficiente é pari a $2\Delta x^3$. Utilizzando la regola di Cramer per calcolare i valori di A_0 e A_2 otteniamo $A_0 = A_2 = 1/(\Delta x^2)$ e, quindi, dalla prima equazione avremo $A_1 = -2/(\Delta x^2)$. La formula alle differenze che volevamo usare á allora data da:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_k) \approx \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{\Delta x^2}\ . \tag{4.3}$$

É semplice, applicando le formule di Taylor e viene lasciato agli studenti per esercizio, che tale formula é del secondo ordine. Potremo utilizzare la (4.3) in tutti i nodi interni al dominio sul quale é definita l'equazione differenziale del secondo ordine.

Restano da ottenere due formule del secondo ordine, per la derivata seconda, da utilizzare agli estremi dell'intervallo. Se indichiamo con $[a,b]$ l'intervallo di integrazione, vediamo di considerare una formula in avanti da applicare nel primo estremo, cioé in a. Questa volta, quindi, i nodi coinvolti saranno: x_k, x_{k+1}, x_{k+2} e la formula diviene

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_k) \approx A_0 u_k + A_1 u_{k+1} + A_2 u_{k+2} \, . \tag{4.4}$$

Procedendo come nel caso di prima troveremo il sistema lineare:

$$\begin{aligned} &A_0 + A_1 + A_2 = 0 \\ &A_0 x_k + A_1 x_{k+1} + A_2 x_{k+2} = 0 \\ &A_0 x_k^2 + A_1 x_{k+1}^2 + A_2 x_{k+2}^2 = 2 \, . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Risolvendo tale sistema otteniamo la formula alle differenze:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_k) \approx \frac{-3u_k + 4u_{k+1} - u_{k+2}}{\Delta x^2} \, , \tag{4.6}$$

che si puó dimostrare, esercizio per gli studenti, essere ancora una volta del secondo ordine. L'altra formula alle differenze, questa volta all'indietro e che é ancora del secondo ordine, da applicare nel modo finale e cioé in b si puó ricavare in modo simile oppure si puó ottenere dalla (4.6) operando la sostituzione formale $\Delta x = -\Delta x$. In tal modo avremo:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_k) \approx \frac{3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2}}{\Delta x^2} \, . \tag{4.7}$$

Le due formule (4.4) e (4.7) e il loro ordine di errore sono state riportate da Kowalik e Marty [11, pp.38-39].

4.2 Formule di quadratura

La tecnica dei coefficienti indeterminati si puó utilizzare nel dedurre, anche, i metodi di quadratura. Di questo ci occuperemo nel presente Capitolo. Il problema che desideriamo affrontare é la ricerca di metodi per il calcolo approssimato degli integrali definiti:

$$I = \int_a^b f(t)dt \; . \tag{4.8}$$

dove la funzione f é definita dall'intervallo $[a, b]$ a valori reali e I é un valore numerico. Preliminarmente, introduciamo la trasformazione di variabile

$$t = (b-a)\tau + a \; . \tag{4.9}$$

Se $t \in [a, b]$ allora $\tau \in [0, 1]$, e, quindi, il nostro integrale (4.8) diviene:

$$I = (b-a)\int_0^1 f(\tau)d\tau \; . \tag{4.10}$$

Possiamo, quindi, focalizzare la nostra attenzione sull'integrale definito standard

$$\int_0^1 f(\tau)d\tau \; . \tag{4.11}$$

Nell'applicare la tecnica dei coefficienti indeterminati per ricavare delle formule di quadrature per (4.11) supporremo di poter scrivere tali formule come:

$$\int_0^1 f(\tau)d\tau \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(z_k) \; , \tag{4.12}$$

dove gli A_k e z_k sono, rispettivamente, pesi e nodi della formula e si considerano, inizialmente, i pesi incogniti e i nodi assegnati. In tal modo otterremo, come vedremo a breve, le formule classiche di quadratura numerica. Al fine di determinare i valori dei pesi, imporremo che la formula che cerchiamo sia esatta per i polinomi della base canonica, e cioé $1, \tau, \tau^2, \tau^3, \ldots, \tau^n$ fino all'ordine n. Iniziamo con il considerare $n = 1$ e il solo polinomio base $f(\tau) = 1$. Scelto $z_0 = 0$ e sostituendo in (4.11) otteniamo facilmente $A_0 = 1$ e quindi la prima formula di quadratura nota come formula dei rettangoli, per il suo significato geometrico.

$$I = (b-a)f(0)\,. \tag{4.13}$$

Continuiamo con fissare $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$, per $n = 1$ e i due polinomi 1 e τ della base canonica. Otterremo, allora, il sistema lineare

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 1 \\ A_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

e, quindi, la formula dei trapezi:

$$I = (b-a)\frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right]\,. \tag{4.15}$$

Se poniamo $n = 2$ e scegliamo un terzo nodo pari a 1/2 allora otterremo il sistema lineare di Cramer

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= 1 \\ \frac{1}{2}A_1 + A_2 &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}A_1 + A_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{4.16}$$

e quindi sottraendo dalla seconda equazione la terza il valore di $A_1 = 2/3$, e, infine, sostituendo tale valore nella seconda ricaveremo $A_1 = 1/6$ e entrambi i due valori nella prima equazione otterremo $A_0 = 1/6$. Si ottiene, in tal modo la famosa formula di Cavalieri-Simpson:

$$I = (b-a)\frac{1}{6}\left[f(0) + 4f(1/2) + f(1)\right] . \tag{4.17}$$

Naturalmente, potremmo continuare ed ottenere altre formule di quadratura, ma questo non aggiungerebbe nulla alla nostra conoscenza. Inoltre, se siamo interessati ad ottenere una maggiore accuratezza, considerata la proprietáddítiva dell'integrale, allora possiamo applicare i metodi fin qui ottenuti in forma composita, cioé suddividendo l'intervallo $[0,1]$ con un reticolo e usando le formule di quadratura piú volte e sommandole.

Veniamo, adesso, a considerare il caso nel quale anche i nodi sono considerati incogniti. É ovvio supporre che cosí facendo l'accuratezza viene raddoppiata e si ottengono le cosí dette formule Gaussiane o semi-Gaussiane. Per semplificare i calcoli consideriamo una formula a tre nodi e scegliamo che solo il nodo centrale, che chiameremo z, sia incognito, potremo allora scrivere:

$$I = (b-a)A_0 f(0) + A_1 f(z) + A_2 f(1) . \tag{4.18}$$

Naturalmente, richiederemo una formula di quadratura esatta per i primi 4 polinomi della base canonica, e cioé $1, \tau, \tau^2, \tau^3$. Procedendo come di consueto otterremo il sistema non-lineare di 4 equazioni in altrettante incognite:

$$
\begin{aligned}
&A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\
&zA_1 + A_2 = \frac{1}{2} \\
&z^2 A_1 + A_2 = \frac{1}{3} \\
&z^3 A_1 + A_2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Al fine di risolvere il sistema (4.19) osserviamo che potremo eliminare l'incognita A_2 sottraendo la seconda equazione dalla terza e poi la quarta equazione dalla terza, ottenendo:

$$
\begin{aligned}
&z(z-1)A_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&z^2(z-1)A_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Adesso, per ottenere una equazione in una incognita osserviamo che se sottraiamo dalla seconda la prima equazione potremo e semplifichiamo il termine $z(z-1)A_1$ avremo:

$$
z = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}\,, \tag{4.21}
$$

e infine $z = 1/2$. Appare quindi chiaro che ritroviamo la formula di quadratura di Cavalieri-Simposon (4.17). Quindi, Cavalieri-Simpson é un metodo semi-Gaussiano, e a questo deve la proprietá di essere un metodo di ordine 4 e non 3. Dimostriamo, infine, che non é un metodo di ordine 5. Infatti, se consideriamo anche il polinomio della base canonica τ^4 dovrebbe essere:

$$
\frac{1}{5} = \frac{4}{6}\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\,.
$$

ma questo non é vero in quanto a secondo menbro semplicando e facendo il minimo comune multiplo otteniamo il valore 5/24 diverso da 1/5.