Laboratorio di Trigonometria

Matteo Gorgone

Dipartimento MIFT, Università di Messina
Piano Lauree Scientifiche

"If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize
how complicated life is."

John von Neumann

TRIGONOMETRIA

Deriva dal greco:

$\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\nu$ = triangolo

$\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu$ = misura

La civiltà Egiziana – 5000 a.C.

La trigonometria nasce sin dai tempi più antichi per studiare i fenomeni naturali e astronomici.

Gli egiziani studiano i fenomeni celesti per prevedere fenomeni quali la piena del fiume Nilo. Costruiscono un calendario solare nel 2773 a.C. suddiviso in 365 giorni. Dalla loro esigenza di saper calcolare angoli nascono i primi rudimenti delle funzioni angolari.

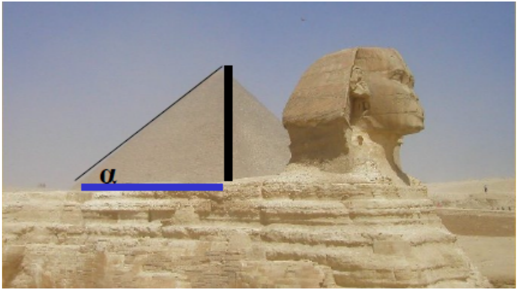
Nel 3000 a.C. viene costruita la Piramide di Cheope.

La costruzione delle piramidi poneva agli architetti diversi problemi tra cui:

- l'altezza, calcolata usando triangoli simili;
- la pendenza delle facce laterali.

Papiro di Rhind – 1650 a.C.

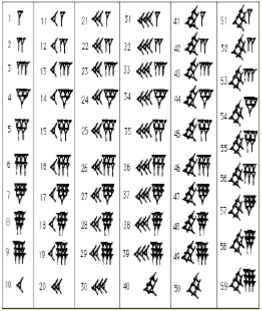
Il problema n. 56 del Papiro di Rhind (dello scriba Ahmes) contiene le prime nozioni di trigonometria e una teoria dei triangoli simili. Propone un problema relativo al calcolo della pendenza della piramide chiamata seqt ottenuta facendo il rapporto fra profondità ed elevazione.



Tale rapporto è uguale alla cotangente dell'angolo α.

La civiltà Babilonese – 2000 a.C.

In Mesopotamia la matematica si sviluppa dal 2000 a.C. Migliaia di tavolette, risalenti alla dinastia degli Hammurabi (1800 – 1600 a.C.) illustrano un sistema numerico ormai consolidato a base 60.



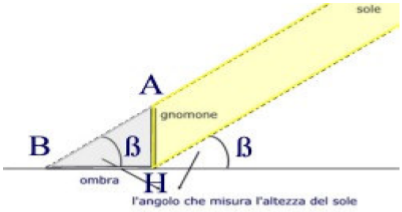
La divisione dell'angolo giro in 360 gradi potrebbe essere legata alla divisione dell'anno in 360 giorni oppure alla possibilità di suddividere l'angolo giro in un numero elevato di parti legate alla base 60.

La civiltà Greca – 2000 a.C.

La Civiltà Greca eredita la matematica egiziana e babilonese. I maggiori progressi si hanno dal VI sec. a.C. per merito di astronomi e matematici quali:

- Anassimandro (600 a.C.);
- Pitagora (500 a.C.);
- Aristotele (350 a.C.).

I greci, per seguire i movimenti del Sole e della sua ombra, utilizzano un bastone piantato verticalmente chiamato Gnomone (indice).



La civiltà Greca

La nascita della Trigonometria si associa agli studi della scuola di Alessandria e al primo trattato di matematica in 13 libri Gli Elementi di Euclide (330 a.C.). In esso vengono riassunte le nozioni di trigonometria note fino a quel tempo.

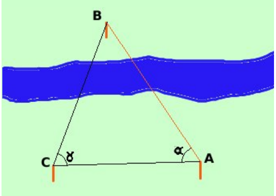
Applicazioni alla Geodesia e all'Astronomia

- Eratostene, misura del meridiano terrestre;
- Aristarco, Sulle dimensioni e distanze del Sole e della Luna.

Aristarco, nella sua opera, misura la distanza Terra – Sole (pari a 19 volte la distanza Terra – Luna); inoltre, fu il precursore della teoria Eliocentrica.

Distanza tra due punti visibili ma non accessibili

Supponiamo di voler calcolare la distanza fra due punti A e B: io mi trovo in A ma non posso raggiungere B perché è al di là del fiume.



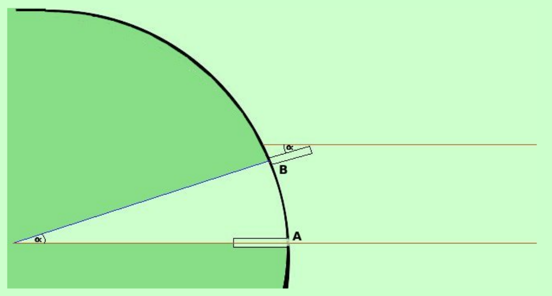
Possiamo spostarci in un punto C e calcolare la distanza AC ed inoltre gli angoli $A\hat{C}B$ e $C\hat{A}B$. Abbiamo quindi il triangolo ABC di cui conosciamo due angoli ed il lato compreso; possiamo calcolare il terzo angolo ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, $\beta = 180° - \alpha - \gamma$. Per il teorema dei seni

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma)} \longrightarrow \overline{AB} = \overline{AC}\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}$$

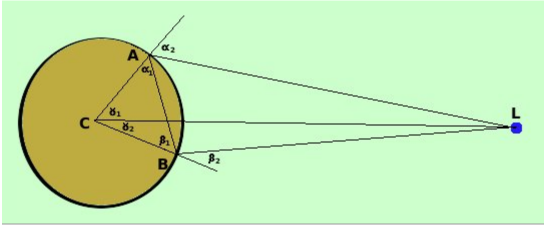
Eratostene, la misura del meridiano terrestre

Il 21 giugno alle ore 12 (solstizio d'estate) i raggi solari sono perpendicolari alla città di Syene (Assuan); nello stesso giorno ad Alessandria d'Egitto (distante 5000 stadi=800 km) i raggi solari formano con la verticale un angolo pari a $\frac{1}{50}$ dell'angolo giro. Moltiplicando per 50 la distanza fra Syene e Alessandria, Eratostene ottiene l'esatta misura del meridiano terrestre

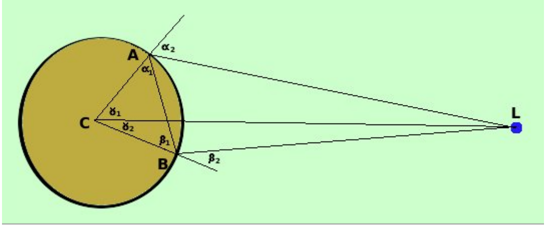
$$800 * 50 = 40000 \quad \text{km}.$$



Distanza Terra – Luna



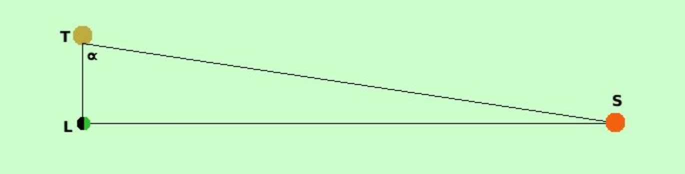
Distanza Terra – Luna



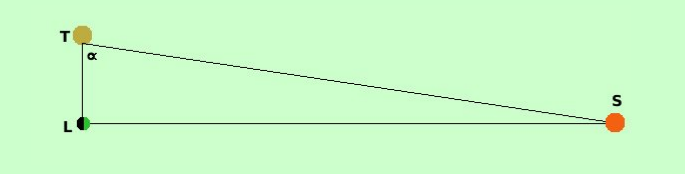
Per il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{LC}}{\sin(180^\circ - \beta_2)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\beta_2 - \gamma_2)} \quad \rightarrow \quad \overline{LC} = \overline{BC}\frac{\sin(\beta_2)}{\sin(\beta_2 - \gamma_2)}$$

Distanza Terra – Sole



Distanza Terra – Sole



Per il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{TS}}{\sin(90^\circ)} = \frac{\overline{TL}}{\sin(90^\circ - \alpha)} \quad \rightarrow \quad \overline{TS} = \frac{\overline{TL}}{\cos(\alpha)}$$

Trigonometria greca e trigonometria moderna

- Uso delle corde di un cerchio invece dei seni: dato un cerchio di raggio assegnato, trovare la lunghezza della corda sottesa da un determinato angolo α;
- Goniometro in cui la semicirconferenza per misurare gli archi è divisa in 180 parti (gradi) e il diametro del cerchio per misurare le corde è diviso in 120 parti.

Ad esempio, la corda di un arco di 180° (angolo piatto) è 120, la misura del diametro; la corda di un angolo di 60° (l'angolo dell'esagono regolare) è 60.

Padri della Trigonometria

Ipparco di Nicea

Seguendo la tradizione Babilonese:

- misura la circonferenza in $360°$;
- costruisce le prime tavole trigonometriche;
- misura gli angoli mediante le corde sottese;
- scopre la precessione degli equinozi.

Padri della Trigonometria

Ipparco di Nicea

Seguendo la tradizione Babilonese:

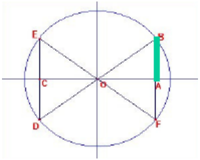
- misura la circonferenza in $360°$;
- costruisce le prime tavole trigonometriche;
- misura gli angoli mediante le corde sottese;
- scopre la precessione degli equinozi.

Claudio Tolomeo

Scrive le tavole delle corde di mezzo grado in mezzo grado da $1°$ a $180°$. Scrive l'opera fondamentale di trigonometria, Almagesto, tradotta in latino e studiata fino al Medioevo. In questo trattato sostiene che la Terra è ferma al centro dell'Universo. La teoria tolemaica fu seguita fino al 1600!!!

Sviluppi in India – V sec. d.C.

Il matematico indiano Aryabhata tabula i valori di mezze corde, indicate per la prima volta con il simbolo jiva, tradotto in arabo come jiaib=piega e in latino sinus.



Altra ipotesi: da semi–corda si ha semi–inscripta e abbreviando s-ins si ottiene sinus. Introduce anche il coseno e senoverso $(1 - \cos)$. Ci fa pervenire le tavole dei seni degli angoli multipli di $3°45'$ fino a $90°$.
Nota: Il termine coseno fu coniato più tardi nel VI secolo dall'inglese Gunter (contemporaneo di Galileo) dal latino complementi sinus (seno dell'angolo complementare).

Gli Arabi – VIII sec. d.C.

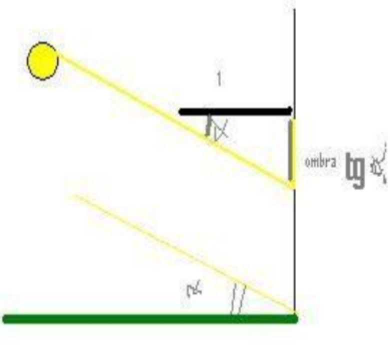
Gli arabi studiano la matematica indiana e la trasmettono.
Il più importante matematico arabo al-Khuwarizmi costruisce nel 830 le prime tavole del seno. Le più antiche tavole di ombre sono prodotte dagli Arabi nel 860 circa. Utilizzano i termini

Tangente = ombra recta,
Co-tangente = ombra versa
(tangente angolo complementare),

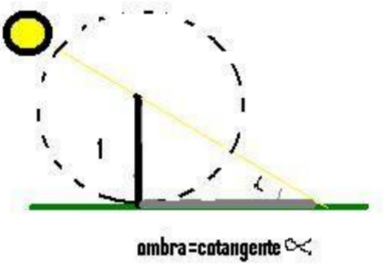
riferiti ai quadranti delle meridiane.

La Gnomonica

La gnomonica è la scienza che si incarica di elaborare teorie e riunire le conoscenze sulla divisione dell'arco diurno, la traiettoria del sole sull'orizzonte, mediante l'uso di proiezioni specifiche su diverse superfici. Questa scienza è molto utile alla costruzione dei quadranti solari, sia orizzontali che verticali. La tangente e la cotangente sono nate in questo ambito. I termini tangente e cotangente sono stati coniati, rispettivamente, nel XVI secolo da T. Fink (1583) e nel XVII secolo da Gunter (1620).



Tangente (umbra versa)= l'ombra gettata sul piano verticale da uno gnomone orizzontale di lunghezza 1;



Cotangente (umbra recta)= l'ombra gettata sul piano orizzontale da uno gnomone verticale di lunghezza 1.

Rinascimento – XV secolo

Johann Müller di Königsberg

Detto Regiomontano, scrive nel 1464 il primo trattato europeo di trigonometria: De triangulis omnimodis, un'esposizione sistematica dei metodi per risolvere problemi relativi ai triangoli.

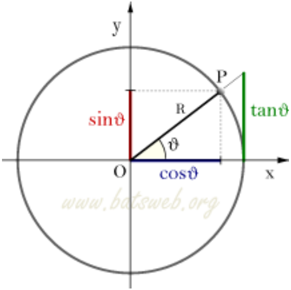
Niccolò Copernico

Inserisce un trattato di trigonometria nella sua celebre opera De Revolutionibus Orbium Caelestium. In opposizione a Tolomeo, pone il sole al centro del moto dei pianeti: Teoria Eliocentrica. Copernico, per evitare l'accusa di eresia, incarica il discepolo Retico di pubblicare l'opera alla sua morte nel 1543. Lo stesso Retico prepara una monumentale serie di tavole delle sei funzioni circolari, definendole mediante il triangolo rettangolo.

XVI secolo, Francoise Viète

Viète è considerato il padre della goniometria:

- Considera la circonferenza goniometrica di raggio unitario;
- Applica la trigonometria a problemi aritmetici ed algebrici;
- Nell'opera Canon mathematicus ricava anche alcune formule dette oggi di prostaferesi.



cosα = ascissa del punto P

sinα= ordinata del punto P

tgα= ordinata del punto T

Formule di moltiplicazione degli angoli di Viète:

$$\begin{aligned}
2\cos(x) &= u, \\
2\cos(2x) &= u^2 - 2, \\
2\cos(3x) &= u^3 - u, \\
2\cos(4x) &= u^4 - 4u^2 + 2, \\
2\cos(5x) &= u^5 - 5u^3 + 5u, \\
2\cos(6x) &= u^6 - 6u^4 + 9u^2 - 2, \\
&\vdots \\
\cos((n+1)x) &= 2\cos(nx)\cos(x) - \cos((n-1)x).
\end{aligned}$$

Ogni riga si ottiene moltiplicando per u la riga precedente e sottraendo la riga ancora precedente.

XVII secolo

La teoria eliocentrica di Copernico viene riconosciuta alla fine del XVII secolo dopo anni di lotte e grazie al contributo di:

- Giovanni Keplero (Astronomia nova, Harmonices mundi libri quinque);
- Galileo Galilei (inventa il telescopio);
- Isaac Newton (Legge di Gravitazione Universale).

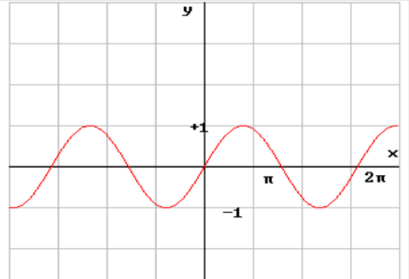
XVII secolo, grafici delle funzioni

Fino alla metà del Seicento i seni (o i coseni, tangenti, ecc.) erano numeri dati da tavole che, per ogni valore dell'angolo, davano il valore del seno. Alla fine del XVII secolo con il calcolo infinitesimale di Leibniz e Newton, emerge un punto di vista diverso: quello funzionale.

Funzioni notevoli

Funzione Seno

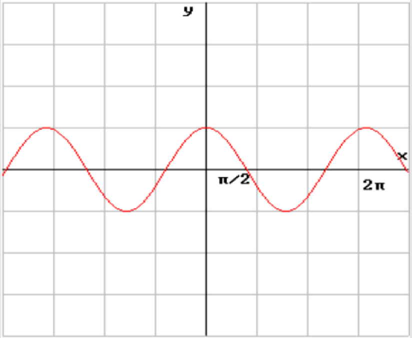
$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad x \mapsto \sin(x)$$



Funzioni notevoli

Funzione Coseno

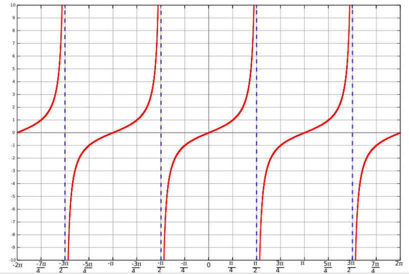
$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad x \mapsto \cos(x)$$



Funzioni notevoli

Funzione Tangente

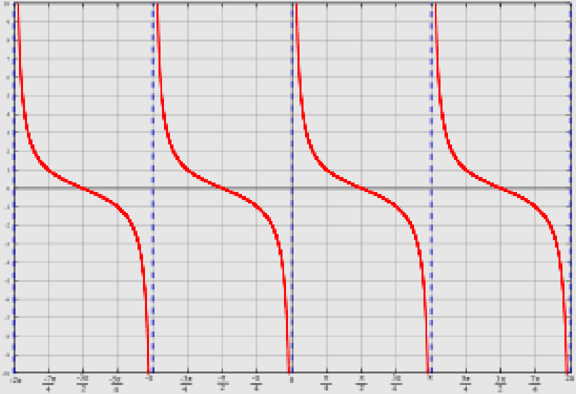
$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tan(x)$$



Funzioni notevoli

Funzione Cotangente

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \cot(x)$$



Leonardo Eulero, XVIII secolo

Con il trattato del 1748 Introductio in analysin infinitorum, Leonardo Eulero presenta la moderna trattazione delle funzioni trigonometriche in Europa. Eulero usò le abbreviazioni sin., cos., tang., cot., sec., e cosec. rimaste quasi invariate nell'uso moderno.

Gli è stata attribuita la formula più bella della matematica:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Leonardo Eulero, XVIII secolo

Con il trattato del 1748 Introductio in analysin infinitorum, Leonardo Eulero presenta la moderna trattazione delle funzioni trigonometriche in Europa. Eulero usò le abbreviazioni sin., cos., tang., cot., sec., e cosec. rimaste quasi invariate nell'uso moderno.

Gli è stata attribuita la formula più bella della matematica:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

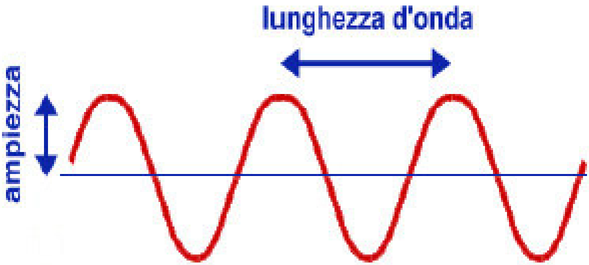
XIX secolo

- Lazare Carnot studia i triangoli qualunque (generalizza il teorema del coseno già noto ai greci);
- James Thomson utilizza per primo il termine Radiante in una pubblicazione del 1873.

Applicazioni della Trigonometria

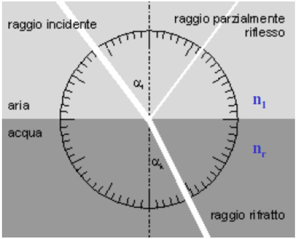
Tutti i fenomeni ciclici sono scomponibili in un insieme di oscillazioni elementari, rappresentate da una sinusoide:

- onde sonore e luminose;
- onde elettromagnetiche;
- cicli solari;
- moti armonici;
- raggi X.



Applicazioni della Trigonometria: la rifrazione della luce

Willebrord Snell, nel 1621 scopre la relazione che intercorre fra angolo d'incidenza, angolo di rifrazione ed indici di rifrazione.



Legge di Snell:

$$\frac{n_r}{n_i} = \frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\alpha_r)}$$

Applicazioni della Trigonometria

Il matematico francese J. B. Fourier (1768-1830) studia le maree utilizzando curve sinusoidali.

L'universo delle onde è un mondo fatto di sinusoidi.

Lombardo Radice

Funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche, utili nella risoluzione dei triangoli, si possono definire a partire dalla circonferenza unitaria, cioè una circonferenza il cui raggio è 1. La circonferenza unitaria è usualmente centrata nell'origine $(0, 0)$ in un sistema di coordinate cartesiane nel piano euclideo.
Se (x, y) è un punto della circonferenza unitaria del primo quadrante, allora x e y sono le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha lunghezza 1. Quindi, per il teorema di Pitagora, x e y soddisfano l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Poiché $x^2 = (-x)^2$ per ogni x, e poiché la riflessione di ogni punto della circonferenza unitaria sull'asse x (o y) appartiene ancora alla circonferenza unitaria, l'equazione precedente vale per ogni punto (x, y) della circonferenza unitaria, non solo nel primo quadrante.

Funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche *coseno* e *seno* possono essere definite sulla circonferenza unitaria come segue. Se (x, y) è un punto della circonferenza unitaria, e se il raggio dall'origine $(0, 0)$ a (x, y) forma un angolo θ con l'asse x positivo, (l'angolo misurato nel verso antiorario), allora

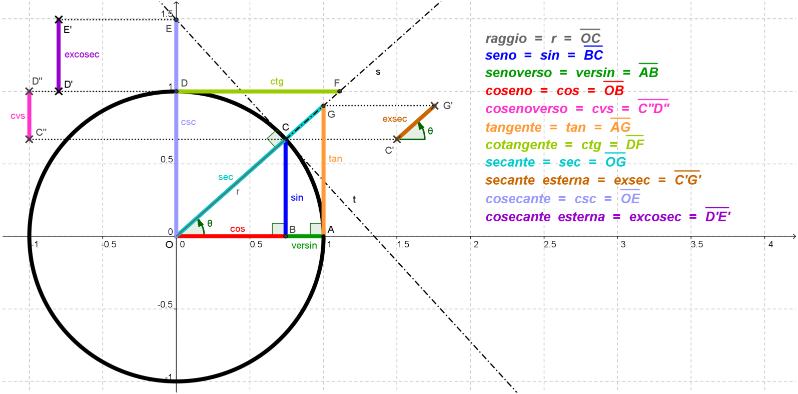
$$\cos(\theta) = x, \qquad \sin(\theta) = y,$$

cioè, l'ascissa x è il coseno dell'angolo θ, $\cos(\theta)$, e l'ordinata y è il seno dell'angolo θ, $\sin(\theta)$. Per definizione delle funzioni seno e coseno, l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ fornisce la relazione fondamentale

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

che è vera per ogni θ.

Funzioni trigonometriche



Funzioni trigonometriche

θ è definito come un angolo orientato, che cioè assume un segno positivo in un verso e negativo nell'altro, a seconda della convenzione oraria o antioraria adottata. Solitamente si adotta la convenzione antioraria, e si suppone che l'angolo sia positivo spostandosi dall'asse delle ascisse in senso antiorario. Una circonferenza con tale angolo orientato è detta circoferenza goniometrica.

Gli angoli, oltre che in gradi sessagesimali (angolo giro: 360^0; angolo piatto: 180^0; angolo retto: 90^0) si misurano in *radianti*. Un radiante è la misura di un angolo che spazza un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio della circonferenza stessa (angolo giro: 2π radianti; angolo piatto: π radianti; angolo retto: $\dfrac{\pi}{2}$ radianti).

Funzioni trigonometriche

Per angoli maggiori di 2π radianti o minori di -2π radianti, si può semplicemente immaginare di compiere più giri intorno al cerchio. Seno e coseno diventano funzioni periodiche di periodo 2π:

$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi k), \qquad \cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k), \quad \forall\, \theta,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

- tangente: $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$,
- cotangente: $\cot(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$,
- secante: $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$,
- cosecante: $\csc(\theta) = \dfrac{1}{\sin(\theta)}$.

Funzioni trigonometriche

$\sin(\theta)$ si annulla per $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
$\cos(\theta)$ si annulla per $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pertanto, la tangente e la secante di un angolo non sono definite per $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, mentre la cotangente e la cosecante non sono definite per $\theta = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Proprietà delle funzioni trigonometriche

Le seguenti relazioni sono valide qualunque sia il valore di θ per cui le funzioni si possono calcolare:

$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \qquad \cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

$$\tan(\theta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \qquad \cot(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta), \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta),$$

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta), \qquad \cot(-\theta) = -\cot(\theta),$$

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta), \qquad \cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta),$$

$$\tan(\theta) = -\tan(\pi - \theta), \qquad \cot(\theta) = -\cot(\pi - \theta),$$

$$\sin(\theta) = -\sin(\pi + \theta), \qquad \cos(\theta) = -\cos(\pi + \theta),$$

$$\tan(\theta) = \tan(\pi + \theta), \qquad \cot(\theta) = \cot(\pi + \theta).$$

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\theta+\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi),$$
$$\sin(\theta-\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi),$$
$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi),$$
$$\cos(\theta-\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi),$$
$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan(\theta)+\tan(\phi)}{1-\tan(\theta)\tan(\phi)},$$
$$\tan(\theta-\phi) = \frac{\tan(\theta)-\tan(\phi)}{1+\tan(\theta)\tan(\phi)},$$
$$\cot(\theta+\phi) = \frac{\cot(\theta)\cot(\phi)-1}{\cot(\theta)+\cot(\phi)},$$
$$\cot(\theta-\phi) = \frac{\cot(\theta)\cot(\phi)+1}{\cot(\theta)-\cot(\phi)}.$$

Formule di Werner

$$\sin(\theta)\sin(\phi) = \frac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2},$$

$$\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{\cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi)}{2},$$

$$\sin(\theta)\cos(\phi) = \frac{\sin(\theta-\phi)+\sin(\theta+\phi)}{2}.$$

Formule di duplicazione

Dalle formule di addizione, per $\phi = \theta$ si ottengono:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta),$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}, \qquad \cot(2\theta) = \frac{\cot^2(\theta)-1}{2\cot(\theta)},$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}, \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$

Formule di duplicazione

Dalle formule di duplicazione dell'angolo, ponendo $\theta = \frac{x}{2}$, si ricava:

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

Formule di duplicazione

Ponendo

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

si hanno le formule parametriche in funzione della $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2},$$

l'ultima delle quali si ricava dalle due precedenti. Queste ultime sono importanti nella risoluzione di alcune equazioni e disequazioni trigonometriche.