

Matematica & Amore

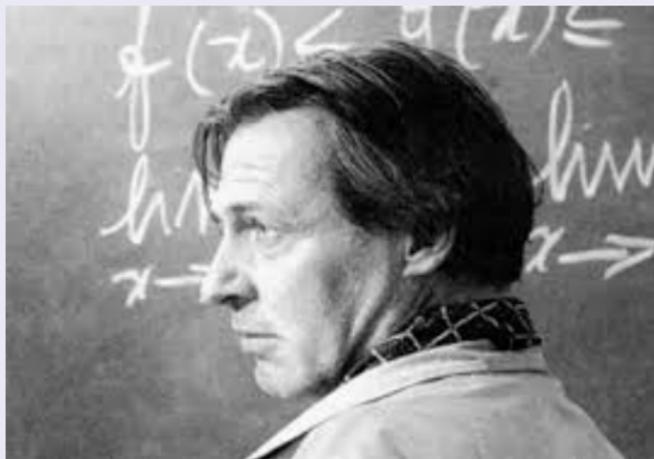
(pétit divertissement)

Francesco Oliveri

Università di Messina



Renato Caccioppoli



Per tre cose vale la pena di vivere: la matematica, la musica e l'amore.

Definizione Aritmetica

Amore: cinque lettere, tre vocali, due consonanti e due idioti.

Mark Twain

L'amore, come tutte le cose che non conoscono né logica né misura, non può essere affrontato con la ragione o il buon senso.

Terenzio

I matematici sono come i francesi: se si parla con loro, traducono nella loro lingua, e diventa subito qualcosa di diverso.

Wolfgang Goethe

Tutto è numero.

Pitagora

Partiamo da lontano...

Nel '700 andavano di moda manuali, destinati alle dame, con gli ultimi progressi nel campo della Matematica e delle Scienze in generale.

LE
NEWTONIANISME
POUR LES DAMES,
o u
ENTRETIENS
SUR LA LUMIERE, SUR LES COULEURS,
ET SUR L'ATTRACTION.
Traduits de l'Italian de M. ALGAROTTI.
Par M. DUPERRON DE CASTERA.
TOME I.
C.^m 112168.



Francesco Algarotti, *“Newtonianesimo per le dame ovvero Dialoghi sopra la luce e i colori”*, Napoli, 1737.

Il Nostro riteneva (!!!) che le donne fossero solo interessate alle avventure sentimentali e spiegava le teorie di Newton attraverso un dialogo galante tra una marchesa e un interlocutore.

Attrazione gravitazionale

Ad esempio, quando l'interlocutore presenta la legge di gravitazione universale secondo la quale due masse si attraggono con una forza inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza, laddove un matematico (o un fisico) scrive

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

la marchesa dà l'interpretazione seguente:

Io credo [...] che anco nell'Amore si serbi questa proporzione de' quadrati delle distanze de' luoghi, o più tosto de' tempi. Così dopo otto giorni di assenza, l'amore è divenuto sessantaquattro volte minore di quel che fosse nel primo giorno.

Platone e il mito dell'androgino

Nel Simposio Platone descrive la figura dell'androgino.

Egli narra di questo terzo genere, non figlio del Sole come gli uomini, non figlio della Terra come le donne, ma figlio della Luna, che della natura di entrambi partecipa. Il mito racconta che la completezza autosufficiente rese gli umani androgini così arroganti da immaginare di dare la scalata all'Olimpo, e Zeus (non volendo distruggerli per non privare l'Olimpo dei loro sacrifici), separò ciascuno di loro in due metà, riducendoli a solo maschio e solo femmina.

Da qui *l'umana nostalgia dell'interezza*, mai placata, che è la radice e in qualche modo la costrizione all'amore:

alla brama e all'inseguimento dell'interezza, ebbene, tocca il nome di amore.

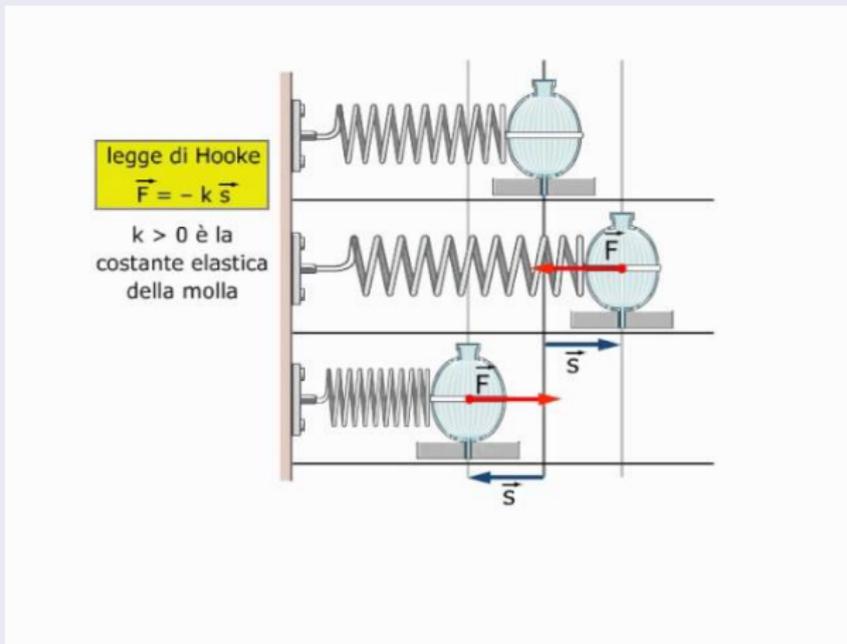
(Elémire Zolla)

Relazioni d'amore e Matematica

C'è una relazione?

- **S. H. Strogatz** [“Love affairs and differential equations”, *Math. Magazine*, 1988] ha descritto, in una versione un po' particolare, la storia d'amore tra Romeo e Giulietta;
- **J. C. Sprott** ha introdotto il modello del Triangolo amoroso tra Giulietta, Romeo e una sua ipotetica amante, Ginevra.
- **S. Rinaldi** [“Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics”, *SIAM J. Appl. Math.*, 1998] ha descritto i sentimenti, emergenti dalle poesie del Canzoniere, che Petrarca provava verso Laura.
- **F. Bagarello & F. Oliveri** [“An operator-like description of love affairs”, *SIAM J. Appl. Math.*, 2010] hanno usato metodi e tecniche della meccanica quantistica per un modello che descrive i **Livelli di Attrazione** tra due o più partner.

Oscillatore armonico



$$\frac{ds}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = -ks.$$

Romeo e Giulietta



La versione di Strogatz

Romeo è innamorato di Giulietta, ma nella nostra versione della storia, Giulietta è una fidanzata capricciosa e incostante. Più Romeo la ama, più Giulietta tenta di fuggire da quella passione. Ma quando Romeo si scoraggia e cerca di dimenticarla, Giulietta comincia a trovare Romeo incredibilmente attraente. Romeo, d'altro lato, si comporta in modo a lei complementare: fa il focoso quando lei lo ama, si raffredda quando lei lo odia.

Romeo e Giulietta in formule...

- $R(t)$ l'amore/odio di Romeo per Giulietta al tempo t ;
- $J(t)$ l'amore/odio di Giulietta per Romeo al tempo t .

R e J assumono valori positivi in caso di amore, valori negativi in caso di odio.

In un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ possiamo definire il **tasso medio di variazione dell'amore** di Romeo o di Giulietta:

$$R_m = \frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad J_m = \frac{J(t_2) - J(t_1)}{t_2 - t_1},$$

e, quando t_2 si avvicina a t_1 , il loro **tasso istantaneo di variazione**, in simboli:

$$\frac{dR}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dJ}{dt}.$$

Romeo e Giulietta in formule...

- $R(t)$ l'amore/odio di Romeo per Giulietta al tempo t ;
- $J(t)$ l'amore/odio di Giulietta per Romeo al tempo t .

R e J assumono valori positivi in caso di amore, valori negativi in caso di odio.

In un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ possiamo definire il **tasso medio di variazione dell'amore** di Romeo o di Giulietta:

$$R_m = \frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad J_m = \frac{J(t_2) - J(t_1)}{t_2 - t_1},$$

e, quando t_2 si avvicina a t_1 , il loro **tasso istantaneo di variazione**, in simboli:

$$\frac{dR}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dJ}{dt}.$$

Modello matematico

Quando vogliamo descrivere matematicamente un fenomeno, costruiamo un **Modello Matematico**.

Il Modello deve tener conto di quello che conosciamo del fenomeno. Ad esempio, per formalizzare un modello, bisogna:

- decidere quali sono le variabili in gioco che descrivono il nostro fenomeno;
- ipotizzare come i loro tassi di variazione dipendono dalle variabili coinvolte.

Infine, bisogna **validare il modello**, comparando le previsioni che consente di fare con il fenomeno che vogliamo descrivere.

Romeo e Giulietta in formule...

A questo punto possiamo **tradurre** le considerazioni di prima in formule (**Goethe dixit**) costruendo un **modello matematico**:

$$\frac{dR}{dt} = aJ, \quad \frac{dJ}{dt} = -bR,$$

dove a e b sono dei numeri positivi, e $\frac{dR}{dt}$ e $\frac{dJ}{dt}$ sono i tassi istantanei di variazione dei due sentimenti.

Commento

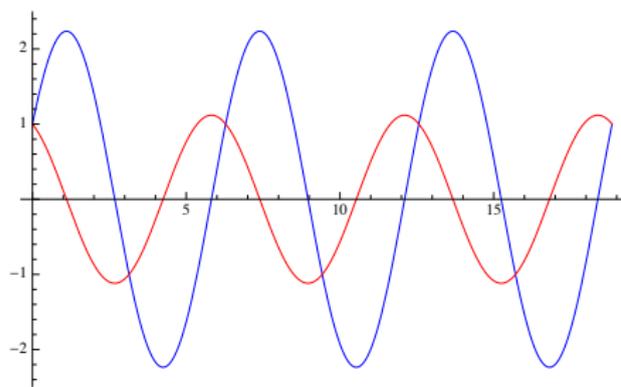
Se $\frac{dR}{dt} > 0$, $R(t)$ aumenta; se $\frac{dR}{dt} < 0$, $R(t)$ diminuisce; se $\frac{dR}{dt} = 0$, $R(t)$ rimane costante (lo stesso per $J(t)$).

Commento

Sono due semplici equazioni (ma parlano più di 100 parole!), e predicono il comportamento di Romeo e di Giulietta nei secoli: le loro passioni travolgenti, le liti, le riappacificazioni, le separazioni.

Come in Shakespeare, anche qui c'è un finale triste: il risultato della loro relazione è un ciclo infinito di amore e odio.

Possiamo risolvere le equazioni (manualmente o al computer).



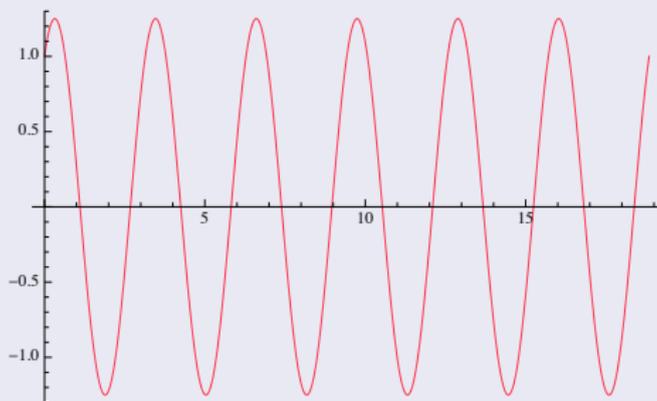
(Giulietta, Romeo)

Ad es., se $a = 2$ e $b = 1/2$, la **dinamica** di $R(t)$ e $J(t)$ è descritta dalle funzioni:

$$R(t) = \cos(t) + 2 \sin(t),$$

$$J(t) = \frac{2 \cos(t) - \sin(t)}{2}.$$

Poiché sia $R(t)$ che $J(t)$ assumono valori positivi (**amore**) e negativi (**odio**) la relazione è turbolenta. Se riportiamo il grafico del prodotto di $R(t)$ e $J(t)$



scopriamo che in questo **infinito ciclo di amore e odio** soltanto per il **25% del tempo** Romeo e Giulietta avranno dei sentimenti di **amore reciproco**, per il **25% del tempo** proveranno **odio reciproco**, e per il **50% del tempo** saranno **fuori sintonia**: uno ama e l'altra odia, o viceversa.

Una variante

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR + dJ,$$

dove a , b , c , d simulano i vari stili romantici di Lui e di Lei.

- **Amante passivo** ($a = 0$): i suoi sentimenti dipendono solo da quelli di Giulietta;
- **Amante insensibile** ($b = 0$): i suoi sentimenti sono indipendenti da quelli di Giulietta;
- **Amante appassionato** ($a > 0$, $b > 0$): Romeo è incoraggiato dai propri sentimenti, nonché da quelli di Giulietta;
- **Stupido narcisista** ($a > 0$, $b < 0$): Romeo vuole più di quello che prova, ma tende a ritrarsi se Giulietta mostra i suoi sentimenti;
- **Amante prudente** ($a < 0$, $b > 0$): Romeo è timido ma è incoraggiato dai sentimenti di Giulietta;
- **Eremita** ($a < 0$, $b < 0$): Romeo si ritrae se ama Giulietta e se da essa è amato.

Quanti stili romantici?

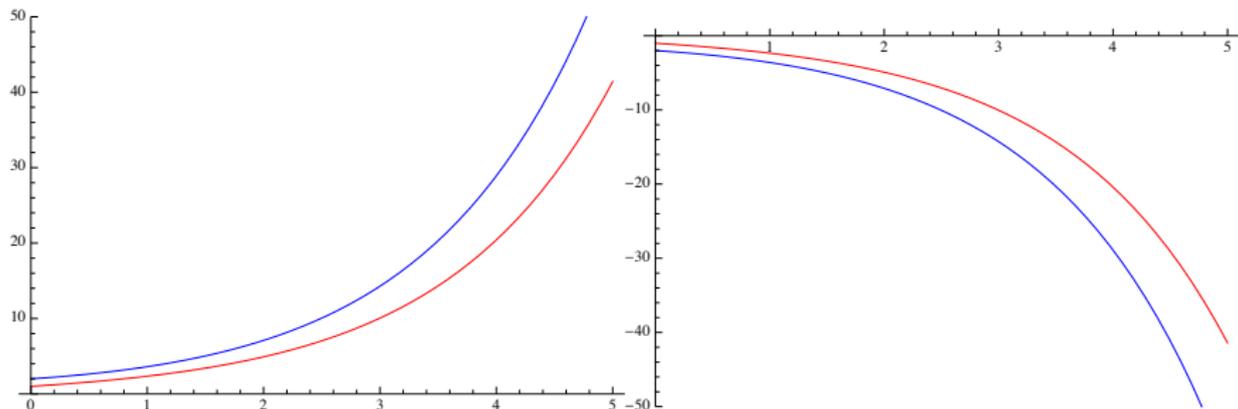
6 stili romantici per Romeo e 6 stili romantici per Giulietta.

In linea di principio $6 \times 6 = 36$ combinazioni.

Amanti passivi

$$\frac{dR}{dt} = bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR.$$

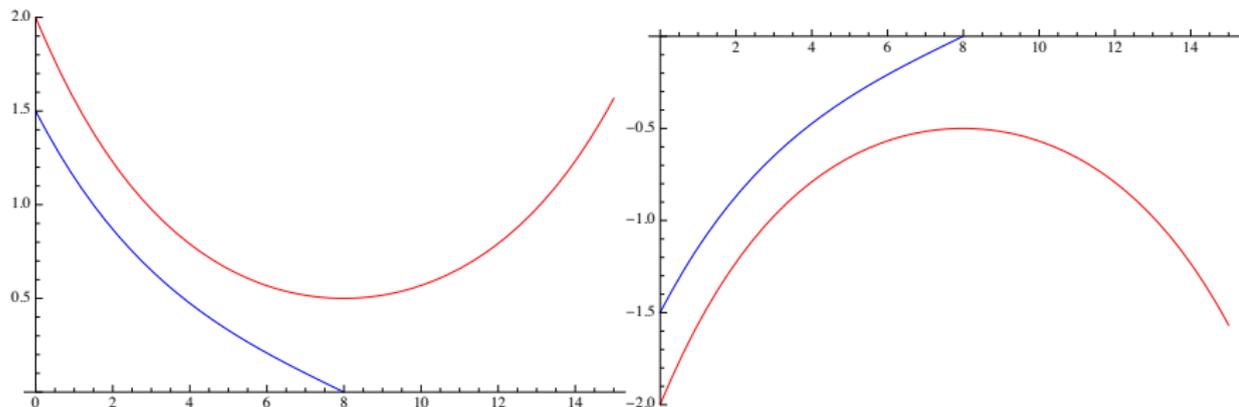
$b > 0, c > 0$ (due amanti appassionati): amore (o odio) reciproco che va all'infinito, secondo le condizioni iniziali.



Amanti passivi

$$\frac{dR}{dt} = bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR.$$

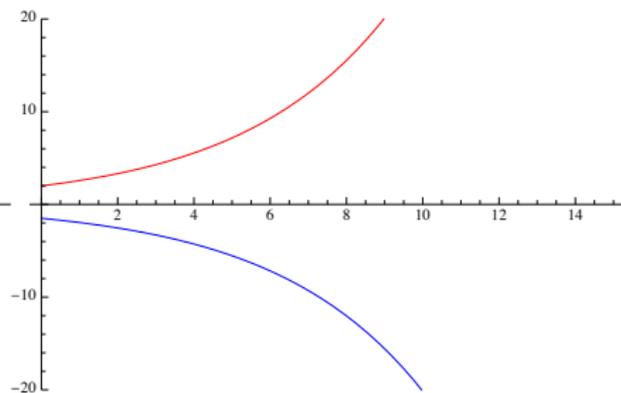
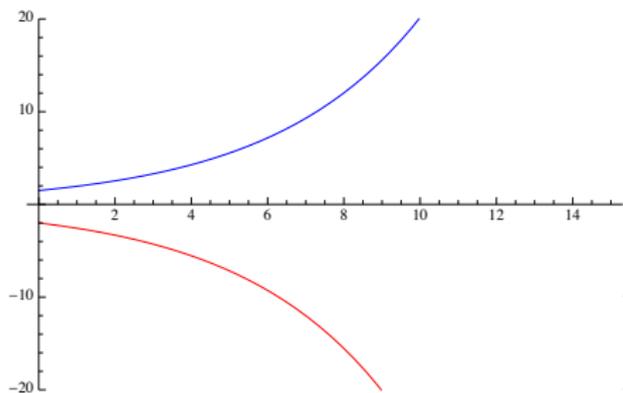
$b < 0$ e $c < 0$ (due narcisisti): amore non ricambiato.



Amanti passivi

$$\frac{dR}{dt} = bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR.$$

$b < 0$ e $c < 0$ (due narcisisti): amore non ricambiato.

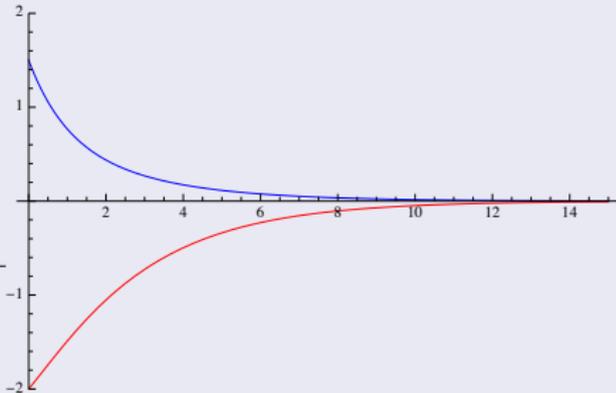
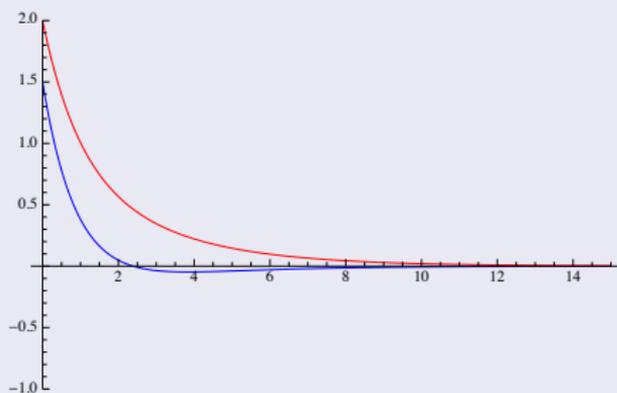


Amanti sensibili ai loro sentimenti

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR + dJ.$$

Amante appassionato + Narcisista: $bc < 0$.

$a + d < -2\sqrt{|bc|}$: Rapporto con poche emozioni che vira rapidamente verso l'apatia.

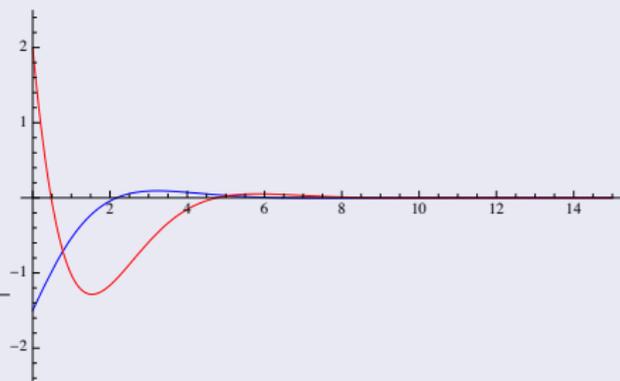
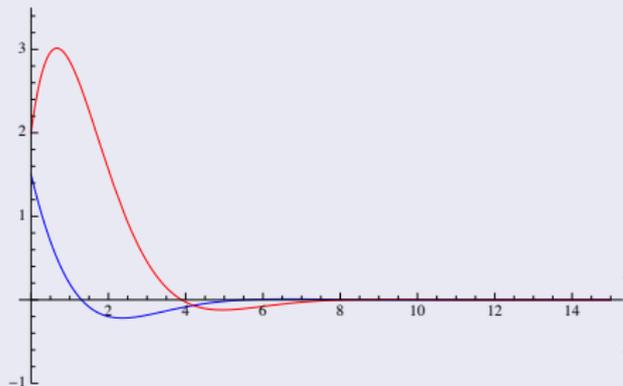


Amanti sensibili ai loro sentimenti

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR + dJ.$$

Amante appassionato + Narcisista: $bc < 0$.

$a + d < 0$: Rapporto con qualche emozione che alla lunga sfocia nell'apatia.

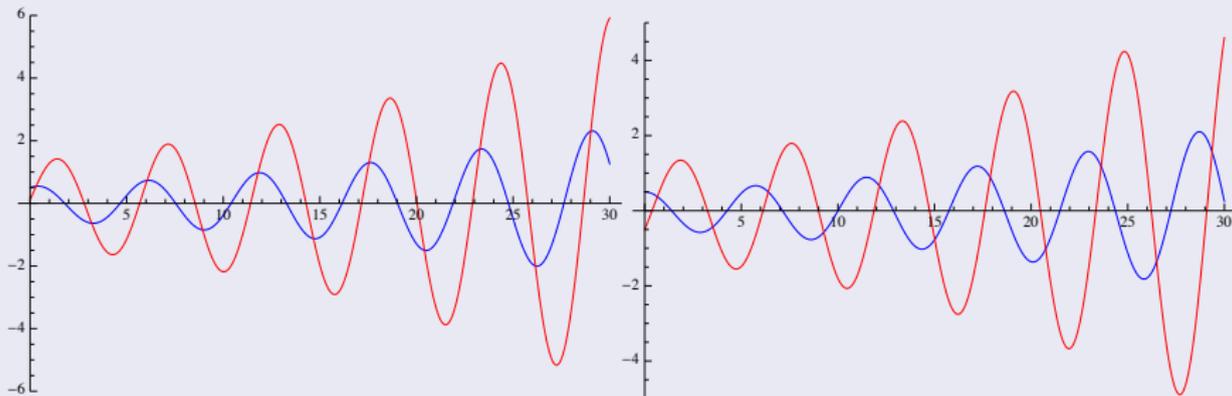


Amanti sensibili ai loro sentimenti

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR + dJ.$$

Amante appassionato + Narcisista: $bc < 0$.

$a + d > 0$: alternanza di amore e odio con livelli massimi di amore e odio che progressivamente crescono nel tempo.



Gli opposti si attraggono?

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ, \quad \frac{dJ}{dt} = cR + dJ.$$

Prendiamo $c = -b$ e $d = -a$.

In dipendenza dei valori di a e b e delle condizioni iniziali:

- l'evoluzione della relazione amorosa può stabilizzarsi su una situazione di amore o di odio;
- l'evoluzione può essere data da un'oscillazione periodica di amore/odio.

L'apatia però è scongiurata!

Romeo assolutamente imperturbabile

$$\frac{dR}{dt} = 0, \quad \frac{dJ}{dt} = cR + dJ.$$

C'è un valore di equilibrio per l'amore di Giulietta $J = -\frac{cR}{d}$, che può corrispondere ad amore o a odio secondo i segni di c e d . Questo equilibrio è stabile se $d < 0$, è instabile se $d > 0$.

- L'amore (o l'odio) di Lei non morirà mai;
- nessuna alternanza di amore e odio è possibile.

“Madame Bovary” (Gustave Flaubert)

Rodolphe si innamora di Emma, una donna sposata. La passione è reciproca, ma quando lei si fa troppo insistente nel pretendere di gestire il tempo dell'uomo, lui si preoccupa e, non disposto ad abbandonare tutto per una delle sue amanti, proporzionalmente si accorge che la sua attrazione verso di lei diminuisce.

???

Possiamo rileggere sotto una luce diversa (matematica) questo frammento?

Il Triangolo amoroso

Passiamo alla **geometria** e consideriamo il **Triangolo Amoroso**.

- Romeo ha un'amante di nome Ginevra;
- Giulietta e Ginevra non sono a conoscenza dell'esistenza della rispettiva rivale;
- Romeo (senza fantasia) adotta lo stesso stile romantico con entrambe.

Il Triangolo amoroso

I sentimenti che Ginevra prova verso Romeo influenzano i sentimenti che lui prova verso Giulietta, nel modo esattamente opposto a quello in cui i sentimenti che Giulietta prova verso Romeo influenzano i sentimenti di lui verso Ginevra.

Forse in formule ci si semplifica (!) la vita:

$$\frac{dR_J}{dt} = aR_J + b(J - G),$$

$$\frac{dJ}{dt} = cR_J + dJ,$$

$$\frac{dR_G}{dt} = aR_G + b(G - J),$$

$$\frac{dG}{dt} = eR_G + fG.$$

Abbiamo un sistema lineare con 4 variabili e 6 parametri.

Qual è il destino di Romeo?

Riassumendo le situazioni a cui questa relazione conduce con tutti i possibili stili romantici (combinazione dei parametri) e con tutte le condizioni iniziali:

- **37%:** Romeo finisce con l'amare Giulietta e con l'odiare Ginevra;
- **37%:** Romeo finisce con l'amare Ginevra e con l'odiare Giulietta;
- **6%:** Romeo finisce con l'amare entrambe;
- **6%:** Romeo finisce con l'odiare entrambe;
- **14%:** apatia.

Qualunque cosa può succedere!

E siamo solo ad un livello di descrizione lineare. Basta aggiungere delle (anche deboli) non linearità e il caos dell'amore esplose in tutta la sua potenza!

Triangolo (o poligono) amoroso con varianti

- Che succede se Giulietta e Ginevra sanno l'una dell'altra (sistema a 6 variabili)
- Che succede se solo Ginevra sa dell'esistenza di Giulietta? (sistema a 5 variabili, asimmetrico)
- Che succede se Giulietta e/o Ginevra hanno un altro amante? (sistema a 6 o 8 variabili)
- Qual è la dinamica in una comune in cui “di libero amore si fa professione”? [Contessa, di P. Pietrangeli] (sistema a un numero elevato di variabili)
- C'è un accoppiamento ottimale di stili romantici che garantisca il successo?

Modello (di coppia) non lineare

Immaginiamo che Romeo risponda positivamente all'amore di Giulietta, ma che, se lei lo ama troppo, lui risponda negativamente.

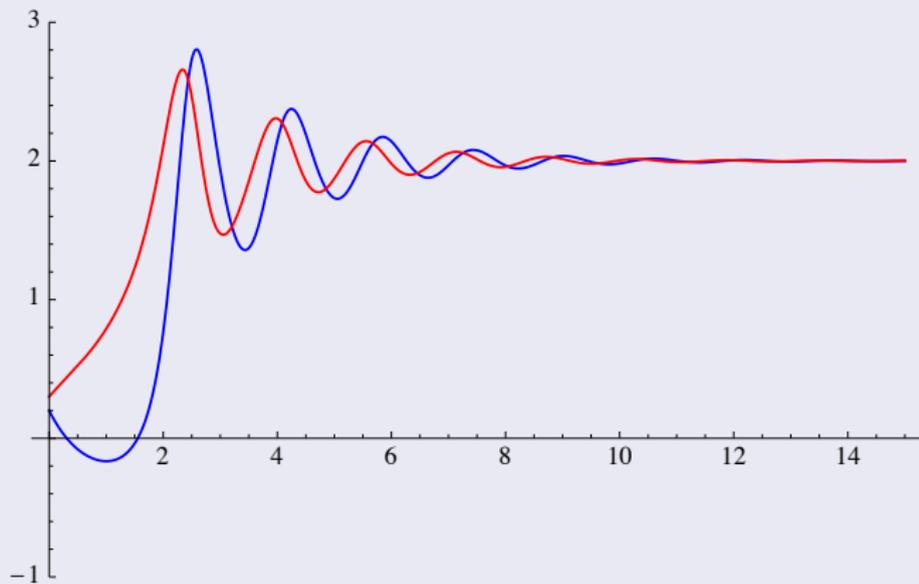
E immaginiamo che anche Giulietta abbia lo stesso tipo di comportamento.

Prendendo per semplicità il valore oltre il quale i due amanti cambino atteggiamento pari a 1, un modello matematico potrebbe essere il seguente.

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ(1 - |J|), \\ \frac{dJ}{dt} &= cR(1 - |R|) + dJ.\end{aligned}$$

Modello (di coppia) non lineare

Romeo Eremita, Giulietta Amante appassionata



Tutto sommato, non male!

Modello (triangolo) non lineare

Lo stesso “modus operandi” degli attori di un triangolo amoroso potrebbe essere modellizzato dalle seguenti equazioni.

$$\frac{dR_J}{dt} = aR_J + b(J - G)(1 - |J - G|),$$

$$\frac{dJ}{dt} = cR_J(1 - |R_J|) + dJ,$$

$$\frac{dR_G}{dt} = aR_G + b(G - J)(1 - |G - J|),$$

$$\frac{dG}{dt} = eR_G(1 - |R_G|) + fG.$$

Modello (triangolo) non lineare

In questo caso il **caos** è in agguato!

Consideriamo il caso in cui:

Romeo è un amante prudente, $a = -3$, $b = -4$;

Giulietta è una stupida narcisista, $c = -7$, $d = 2$;

Ginevra è un'amante prudente, $e = 2$, $f = -1$.

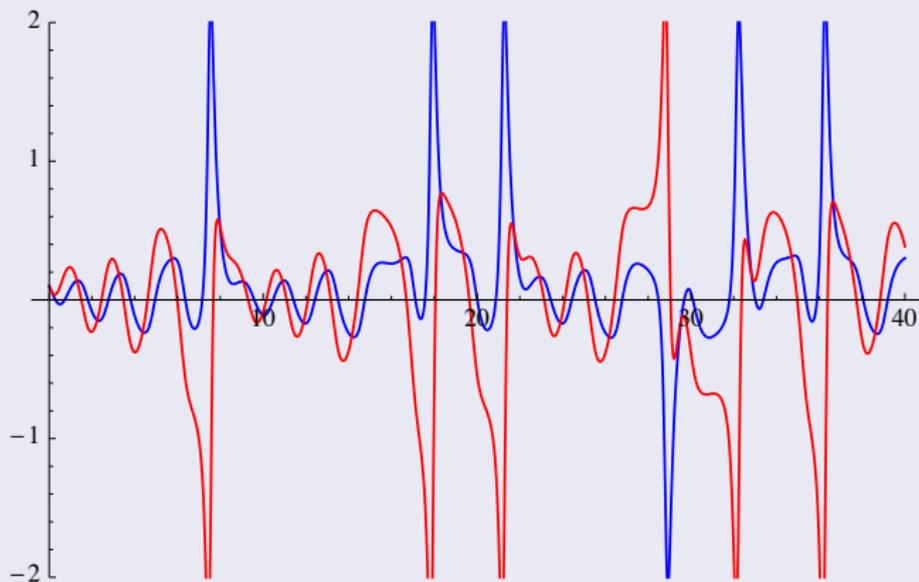
Consideriamo due diverse (ma vicine!) condizioni iniziali:

(1) $R_J(0) = 0.1$, $J(0) = 0.1$, $R_G(0) = 0.1$, $G(0) = 0.1$;

(1) $R_J(0) = 0.11$, $J(0) = 0.1$, $R_G(0) = 0.1$, $G(0) = 0.1$.

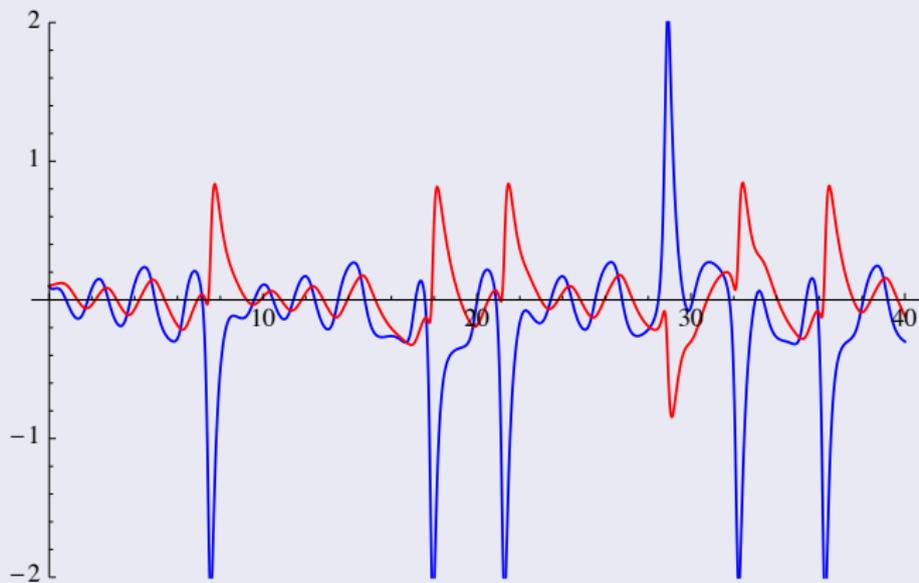
Romeo vs. Julietta

Situazione 1



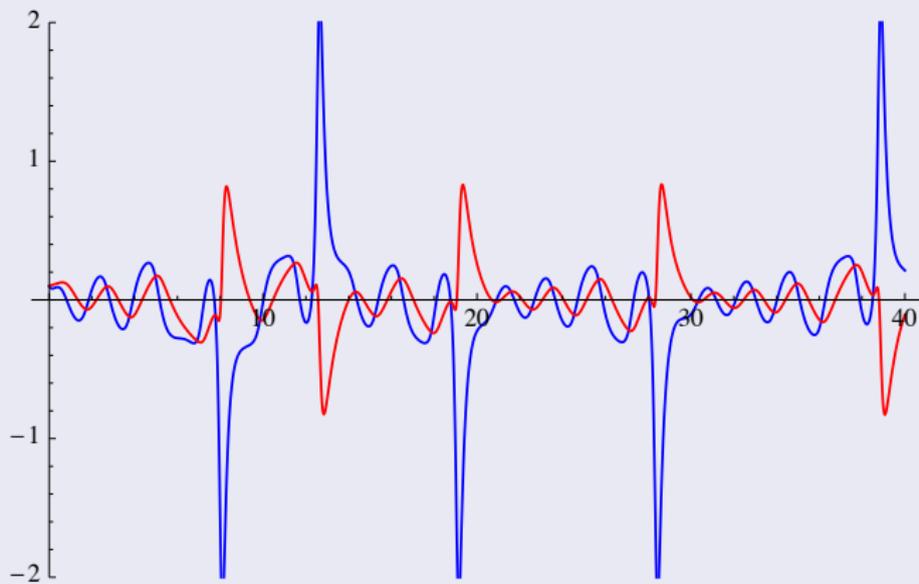
Romeo vs. Ginevra

Situazione 1



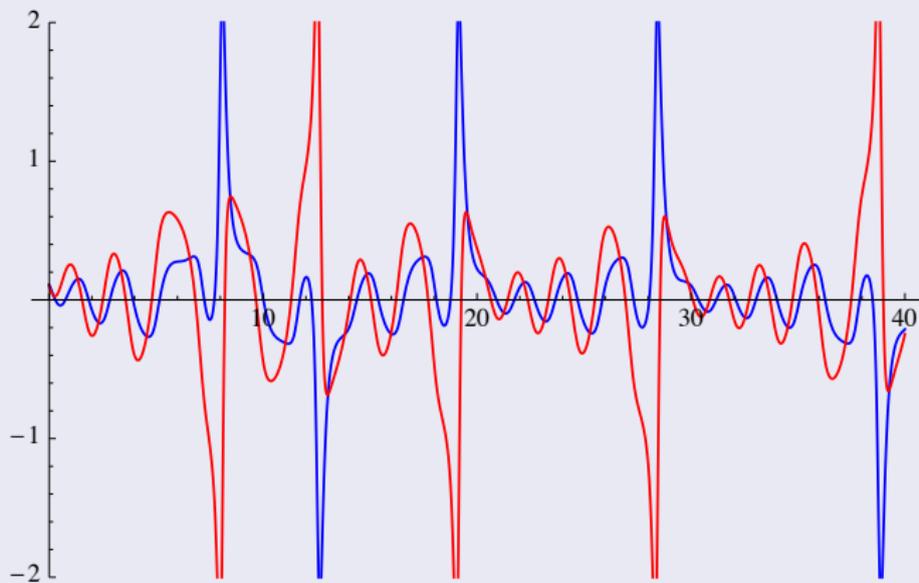
Romeo vs. Julietta

Situazione 2



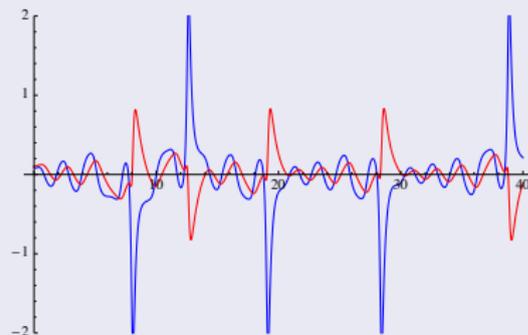
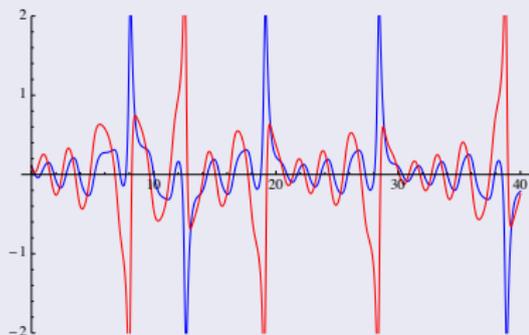
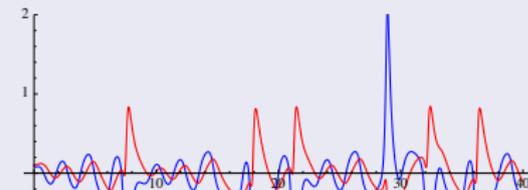
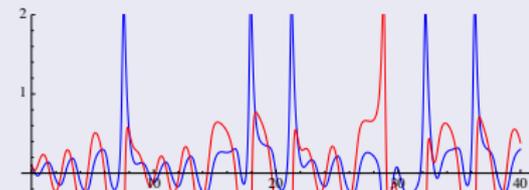
Romeo vs. Ginevra

Situazione 2

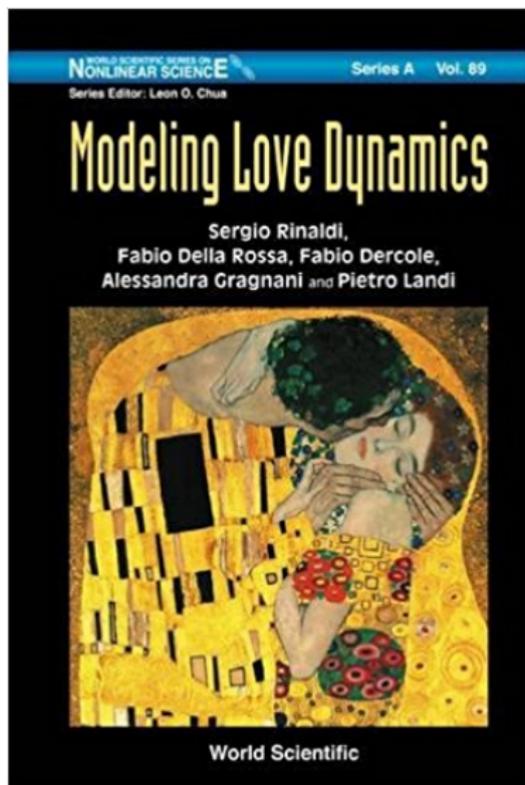


R. vs. Giulietta (sinistra); R. vs. Ginevra (destra)

Situazioni 1 e 2 a confronto



Love dynamics



Laura e Petrarca



Il Canzoniere si compone di 366 poesie, di cui solo 23 sono datate. Il periodo di composizione va dal 1330 al 1347: 263 sonetti in vita di Madonna Laura, 103 in morte di Madonna Laura.

Petrarca aveva 23 anni quando incontrò per la prima volta Laura, diciannovenne, nella chiesa di Santa Chiara in Avignone il 6 aprile 1327, la donna misteriosa, bellissima ma già maritata, che lo tenne “ardendo” per 21 anni ispirandogli il Canzoniere. Le 366 poesie esprimono i diversi stati d'animo del poeta, e sono presentate secondo uno schema che non sembra quello temporale.



Laura incorona Petrarca, Biblioteca Medicea Laurenziana, Firenze.

Laura?

Laura de Noves (1310 - 6 aprile 1348) fu una nobildonna, sposa del marchese Ugo di Sade, probabilmente avignonese.

Potrebbe essere Lei la Laura celebrata da Francesco Petrarca, anche se alcuni ritengono che non sia mai esistita e che sia stata soltanto un espediente poetico.

Probabilmente, Petrarca faceva riferimento al **Laurus** (Alloro), l'albero sacro per il dio Apollo, protettore della poesia.

Laura o non Laura, **“Francisci Petrarchae laureati poetae Rerum vulgarium fragmenta”** (“Frammenti di componimenti in volgare di Francesco Petrarca, poeta coronato d'alloro”), è la storia, attraverso la poesia, della vita interiore di Petrarca.

Datazione del Canzoniere

Una datazione è stata proposta da Frederic J. Jones [“**The Structure of Petrarch’s Canzoniere A Chronological, Psychological and Stylistic Analysis**”, 1995] che ha introdotto una scala di valori, tra $+1$ e -1 , corrispondenti ai diversi sentimenti del Petrarca, come risultavano dai suoi versi, dall’ardente passione alla più profonda disperazione, passando per amore, tenera amicizia, simpatia, struggente melanconia, inquietudine o angoscia.

Dal Canzoniere

Sonetto LXXVI (grado +0.6): Grande Amore.

*Amor con sue promesse lusingando,
mi ricondusse alla prigione antica.*

Dal Canzoniere

Sonetto LXXIX (grado +1): Amore Estatico.

*Così mancando vo di giorno in giorno,
sì chiusamente, ch'i' sol me ne accorgo
et quella che guardando il cor mi strugge.*

Dal Canzoniere

Sonetto CLXXVI (grado -0.45): **Malinconia.**

*Parme d'udirli, udendo i rami et l'ore
et le frondi, et gli augei lagnarsi, et l'acque
mormorando fuggir per l'erba verde.*

Dal Canzoniere

Sonetto XXII: Amore passionale di Petrarca.

*Con lei foss'io da che si parte il sole,
et non ci vedess'altri che le stelle,
sol una nocte, et mai non fosse l'alba.*

Dal Canzoniere

Sonetto XXI: Laura si irrigidisce di fronte alle insistenze di Petrarca.

*Mille fiate, o dolce mia guerrera,
per aver co' begli occhi vostri pace
v'aggio proferto il cor; mâ voi non piace
mirar sí basso colla mente altera.*

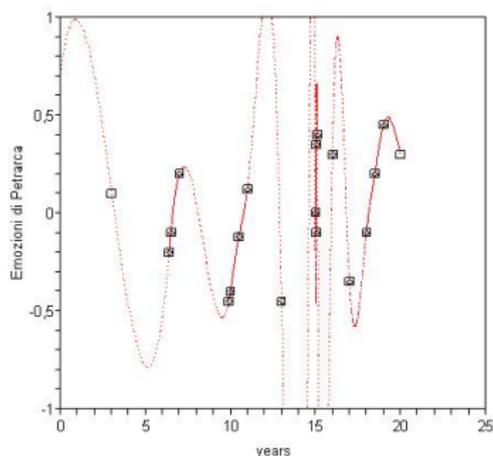
Dal Canzoniere

Sonetto LXIII: La pietà di Laura verso il derelitto Petrarca.

*Volgendo gli occhi al mio novo colore
che fa di morte rimembrar la gente,
pietà vi mosse; onde, benignamente
salutando, teneste in vita il core.*

Il ciclo emozionale di Petrarca

L'analisi effettuata da Jones gli ha permesso di fare una congettura riguardo al fatto che le emozioni del poeta seguirono, per circa 20 anni, un modello ciclico abbastanza regolare, variando tra gli estremi di estasi e disperazione (con un periodo di poco meno di 4 anni).



I punti sono le 23 poesie (data-te) analizzate da Jones. Le linee tratteggiate sono stime del ciclo emozionale di Petrarca.

Il modello di Laura e Petrarca

Le emozioni di Laura e Petrarca sono modellizzate mediante tre equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= -\alpha_1 L + R_L(P) + \beta_1 A_P, \\ \frac{dP}{dt} &= -\alpha_2 P + R_P(L) + \beta_2 \frac{A_L}{1 + \delta Z}, \\ \frac{dZ}{dt} &= -\alpha_3 Z + \beta_3 P,\end{aligned}$$

- $L(t)$ esprime il rapporto di Laura con il poeta;
- $P(t)$ esprime l'amore di Petrarca per Laura;
- $Z(t)$ esprime l'ispirazione poetica del Petrarca;
- $R_L(P)$ e $R_P(L)$ sono funzioni di reazione;
- A_P (A_L) l'interesse di Petrarca (Laura).

Le funzioni di risposta

La funzione di reazione di Petrarca $R_P(L)$ è scelta in forma lineare:

$$R_P(L) = \beta_2 L$$

Una funzione di reazione lineare non è appropriata per Laura per la quale una funzione di reazione come la seguente sembra più adeguata:

$$R_L(P) = \beta_1 P \left(1 - \left(\frac{P}{\gamma} \right)^2 \right)$$

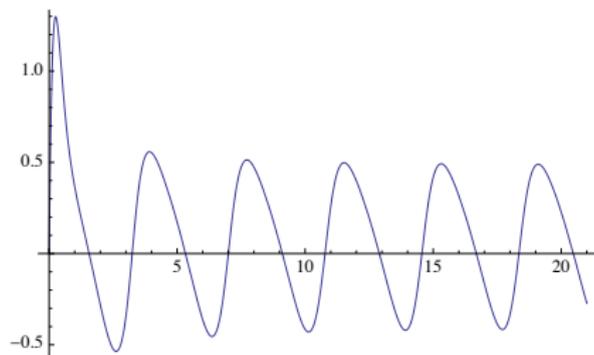
Il modello

Laura, ben disposta a piccole schermaglie, risponde positivamente alle sollecitazioni del Petrarca soltanto entro ben precisi limiti convenzionali, superati i quali la sua reazione è di immediata chiusura.

Successivamente Laura si lascia commuovere dalla disperazione del poeta e con P su valori negativi, L ritorna a salire verso valori positivi.

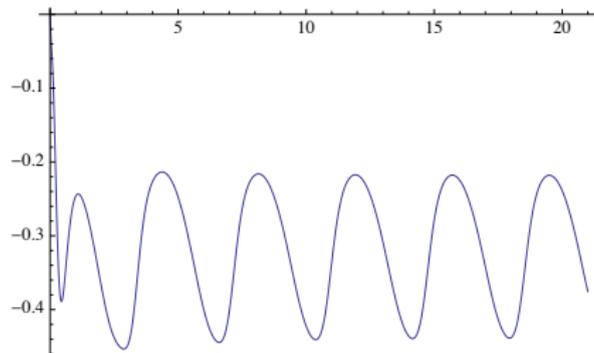
Il modello mette in evidenza il comportamento ciclico dei due innamorati, quale emerge dai versi del Canzoniere, con un alternarsi di periodi di esaltazione amorosa a periodi di disperazione.

L'amore di Petrarca



Dopo un primo picco, l'amore di Petrarca tende verso un ciclo regolare caratterizzato da picchi alternati positivi e negativi.

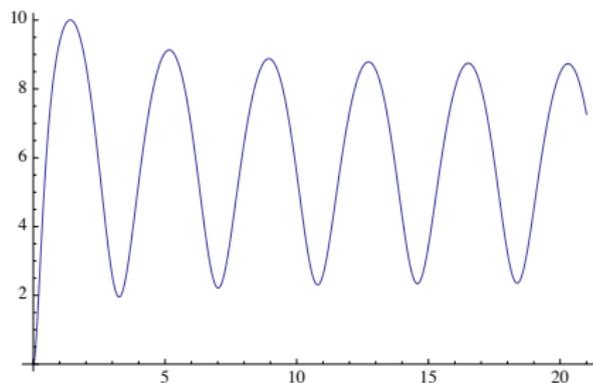
L'amore di Laura



Anche $L(t)$ esibisce un andamento ciclico. Ma c'è un MA.

L'amore di Laura è sempre negativo.

L'ispirazione poetica



La variabile Z all'inizio sale molto lentamente, ma si mantiene poi sempre positiva.

E questo è in accordo col fatto che Petrarca scrisse i suoi primi versi soltanto tre anni dopo aver conosciuto Laura, ma proseguì poi senza interruzioni.



“That’s all Folks!”