

Riccardo Fazio

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Messina

`mat521.unime.it/fazio`
`rfazio@unime.it`

Metodi Numerici per Problemi ai Valori Iniziali



Metodi Numerici per Problemi ai Valori Iniziali

Copyright © MMXIV Riccardo Fazio

ISBN

L'utilizzo di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc, in quest'opera, anche in assenza di particolare indicazione, non consente di considerare tali denominazioni o marchi liberamente utilizzabili da chiunque ai sensi della legge sul marchio. I programmi di questo libro sono stati aggiunti solo a fini didattici. Nonostante essi siano stati testati, su diverse piattaforme e con diversi linguaggi di programmazione, e si sia cercato in ogni modo di verificare che siano esenti da errori, l'autore e l'editore non potranno ritenersi responsabili di eventuali danni derivanti dal loro utilizzo.

Riprodotta da copia camera-ready fornita dall'Autore. La figura, in copertina, mostra la scelta dei passi di integrazione di un metodo adattivo per un ciclo della soluzione del problema di van der Pol. I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento anche parziale, con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.

I edizione: Settembre 2014

Indice

Prefazione	v
1 Problemi ai valori iniziali	1
1.1 Problemi ai valori iniziali	1
1.2 Metodi numerici	7
1.2.1 Reticoli e funzioni di reticolo	7
1.3 I metodi di Eulero e dei trapezi	8
1.4 Proprietà dei metodi numerici	10
1.5 Metodi di Taylor	14
1.6 Metodi di Runge-Kutta	16
1.6.1 Runge-Kutta come metodi lineari	21
1.6.2 Consistenza e condizioni per l'ordine	24
1.7 Convergenza dei metodi ad un passo	29
1.8 Metodi multi-passo	34
1.9 Problemi stiff	37
1.10 Zero-stabilità	42
1.11 Stabilità assoluta	46
1.11.1 Metodi di Taylor	48
1.11.2 Metodi di Runge-Kutta	49
1.11.3 Regioni di assoluta stabilità	50
1.11.4 Metodi multi-passo	52
1.12 L-stabilità	57
Esercizi	60

2	Problemi conservativi	65
2.1	Problemi conservativi	65
2.2	Problema test: oscillatore armonico	66
2.2.1	Metodi numerici	67
2.3	Risultati numerici	71
2.4	Proprietà di conservazione	77
	Esercizi	82
3	Strategie per l'adattività	85
3.1	Strategie dei metodi adattivi	85
3.2	Analisi delle strategie adattive	87
3.2.1	Controllo dell'errore locale e adattività	87
3.2.2	Estrapolazione e adattività	90
3.2.3	Stabilità e adattività	90
3.3	Scelta del passo di integrazione	91
3.4	Algoritmo adattivo	93
3.4.1	Problemi stiff	96
	Esercizi	101
4	Problemi ai valori al contorno	105
4.1	Problemi ai valori al contorno	105
4.2	Metodi di puntamento	106
4.3	Problema test	107
4.3.1	Risultati numerici	108
4.4	Problemi di fluido dinamica	109
	Esercizi	113
A	Nozioni preliminari	115
A.1	Il principio di induzione	115
A.2	Teoremi per funzioni continue	116
A.3	Formula di Taylor	117
A.4	Notazione asintotica dell'errore	119

B Metodi in MATLAB o Octave	121
B.1 Problemi ai valori iniziali	121
B.2 Problemi conservativi	127
B.3 Algoritmo adattivo	133
B.4 Problemi ai valori al contorno	137
 Bibliografia	 139
 Indice analitico	 144

Prefazione

Scopo e storia dell'Analisi Numerica. L'Analisi Numerica è la disciplina Matematica che si occupa degli algoritmi e dei metodi per risolvere, in forma numerica, classi di problemi matematici. Lo scopo è di trovare e sviluppare gli algoritmi, implementarli sugli elaboratori elettronici, e di studiare le loro caratteristiche. Studi di Analisi Numerica precorrono di secoli l'invenzione degli elaboratori elettronici, si veda Goldstine [26] oppure Nash [39]. Molti algoritmi e metodi numerici portano il nome dei grandi matematici: da Archimede di Siracusa (per il metodo di esaustione applicato al calcolo del valore di π — pi-greco — vedi Barbin et al. [3, pp. 139-145]; per notizie sulla vita e le opere di Archimede vedi <http://it.wikipedia.org/wiki/Archimede>) a Eulero (vedi <http://it.wikipedia.org/wiki/Eulero>), da Gauss (vedi <http://it.wikipedia.org/wiki/Gauss>) a Newton (vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton).

Scopo e contenuto del libro. Questo libro si presta a essere adottato da corsi per le lauree magistrali in matematica. Alcuni argomenti, opportunamente approfonditi, potrebbero essere di interesse per dei corsi di Master in Matematica Applicata. La struttura del libro è semplice da descrivere. Nel capitolo 1 viene considerata la teoria dei metodi numerici per i problemi ai valori iniziali governati da equazioni differenziali ordinarie. Di particolare interesse i concetti fondamentali di consistenza, stabilità, convergenza e il conseguente Teorema di convergenza per i metodi ad un passo. Nel capitolo 2 vengono descritti i

metodi numerici per i problemi di conservazione. Il capitolo 3 propone alcune strategie per l'implementazione e l'utilizzo dei metodi adattivi. Nel capitolo 4 consideriamo l'utilizzo dei metodi numerici per i problemi ai valori iniziali per la soluzione dei problemi ai valori al contorno. Infine, nell'Appendice A e nell'Appendice B trovano spazio, rispettivamente, delle nozioni preliminari utili come base per gli argomenti dei capitoli precedenti e i listati dei codici di MATLAB o Octave, utili per comprendere l'effettiva implementazione degli algoritmi utilizzati. Inoltre, è stata proposta una selezione significativa di esempi numerici che, utilizzando i listati dei programmi riportati nell'Appendice B, può essere facilmente riprodotta. Infine, al termine di ciascun capitolo una selezione di esercizi consente allo studente, attraverso il loro svolgimento, la verifica della comprensione degli argomenti proposti.

Notazione. L'autore ha tentato di definire la notazione direttamente nel testo, ma per completezza includiamo qui un elenco delle notazioni comunemente accettate dalla comunità matematica.

\mathbb{R}	La retta reale: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
\mathbb{R}^n	Lo spazio vettoriale delle n -uple di numeri reali.
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$.
$C[a, b]$	L'insieme delle funzioni definite e continue in $[a, b]$.
$C^k[a, b]$	Funzioni e le prime k derivate continue in $[a, b]$.
$ x $	Valore assoluto: $ x = -x$ se $x < 0$ e $ x = x$ se $x \geq 0$.
$n!$	Fattoriale di n .
$\sum_{j=0}^J x_j$	La sommatoria dei valori x_j .
$O(\cdot)$	Ordine di (si legge anche O-grande di). Vedi la sezione A.4.

La tabella 1 riporta anche gli autori che hanno utilizzati per primi le notazioni più comuni.

Ringraziamenti ed errori. L'autore desidera ringraziare Angela Liotta e Antonino Fazio per aver corretto l'italiano della versione finale del manoscritto. Una pagina web è stata predisposta per questo

Simbolo	Nome	Autore (anno)
∞	Infinito	Wallis (1655)
π	pi-greco (3.14259...)	Jones (1706)
e	base di Nepero (2.171828...)	Euler (1736)
i	unità immaginaria ($\sqrt{-1}$)	Euler (1794)
$n!$	fattoriale	Kramp (1808)
Σ	sommatoria	Fourier (1820)
Π	produttoria	Jacobi (1829)
$ x $	valore assoluto	Weierstrass (1876)
O	O grande	Bachmann (1894)

Tabella 1: I simboli e gli studiosi che li hanno introdotti.

libro di testo all'URL <http://mat521.unime.it/fazio/MNODE.html>. Tutti gli errori rimasti, e principalmente quelli di matematica, sono da ascrivere al solo autore. Eventuali segnalazioni di errori, o eventuali refusi di stampa, potranno essere segnalati all'e-mail dell'autore fzarcr58@gmail.com.

Messina, 11 settembre 2014
Riccardo Fazio

Capitolo 1

Problemi ai valori iniziali

I problemi ai valori iniziali rappresentano la forma più semplice di problemi connessi ai modelli differenziali delle scienze e dell'ingegneria. I metodi numerici permettono di risolvere in modo approssimato tali problemi. Il loro utilizzo, e lo studio delle loro proprietà, precorre di secoli l'invenzione degli elaboratori elettronici. In effetti, considerati gli aspetti poco soddisfacenti dell'utilizzo delle serie per la soluzione dei problemi differenziali, nel capitolo settimo "On the integration of differential equations by approximations", del primo volume del 1768 del trattato di Eulero dal titolo *Institutionum Calculi Integralis*, venne descritto il metodo numerico universalmente noto come metodo di Eulero, si veda [3, pp. 375-378].

1.1 Problemi ai valori iniziali

Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) , & t \in [t_0, t_{\max}] \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0 , \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{u} : I = [t_0, t_{\max}] \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}^d$ ed $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t_0 \in I$, $\mathbf{u}_0 \in J \subset \mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N} - \{0\}$. Assumiamo che $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ sia continua in $I \times J$ e localmente lipschitziana in (t_0, \mathbf{u}_0) rispetto ad \mathbf{u} . Esistono quindi un intervallo $I^* \subset I$ e contenente t_0 , un intervallo $J^* \subset J$ e contenente \mathbf{u}_0 ed una costante positiva L tali che $\forall t \in I^*$ e $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in J^*$ si ha:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_2)\| \leq L \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| . \quad (1.2)$$

Se la condizione di lipschitzianità è verificata, allora il problema ai valori iniziali ammette una soluzione unica in un opportuno intorno di t_0 .

Diremo che il problema (1.1) è

1. *Lineare* se $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ è lineare in \mathbf{u} ;
2. *Autonomo* se $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(t)$;
3. *Non stiff* se tutte le componenti della soluzione evolvono con la stessa scala temporale. Questo avviene, in prima approssimazione, se la matrice Jacobiana $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ ha tutti gli autovalori della stesso ordine di grandezza.
4. *stiff* se le componenti della soluzione evolvono con diverse scale temporali. Problemi stiff sono comuni nei modelli che descrivono reazioni chimiche con tempi differenti di reazione e nei problemi differenziali ordinari che si ottengono dalla semi-discretizzazione di problemi a derivate parziali. I problemi stiff sono, da un punto di vista numerico, più difficili da risolvere dei problemi non-stiff.
5. *Hamiltoniano* se \mathbf{f} ha la forma

$$\mathbf{f} = P^{-1} \nabla H , \quad (1.3)$$

dove $H(\mathbf{u})$ è l'Hamiltoniana del sistema e

$$P = \begin{bmatrix} O & -I \\ I & O \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

dove O e I sono la matrice nulla e la matrice identità di ordine $d/2$. Sistemi Hamiltoniani sono comuni nella meccanica dei corpi rigidi, in astronomia (meccanica celeste), e in dinamica molecolare. Per approssimare, per tempi sufficientemente lunghi, i sistemi Hamiltoniani useremo metodi numerici speciali di tipo simplettico o reversibile.

Notiamo come nel caso autonomo il problema (1.1) ha la soluzione esatta

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{u}_0 \quad (1.5)$$

che si ottiene per quadratura, in forma esatta se siamo in grado di integrare la funzione oppure in forma approssimata se dobbiamo ricorrere a formule numeriche di quadratura.

Problema 1 *Come esempio di un problema scalare consideriamo un modello per la crescita logistica di una popolazione, si veda [15, pp. 69-77],*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= p u (1 - u) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove p e u_0 sono valori positivi assegnati. Il parametro p rappresenta un fattore di crescita per la popolazione. Il problema (1.6) ha la soluzione esatta

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1 - u_0) e^{-p t}}. \quad (1.7)$$

Il significato geometrico del problema ai valori iniziali (1.1) con $d = 1$, che corrisponde al caso scalare, è semplice da spiegare. L'equazione differenziale definisce nel piano (t, u) un campo vettoriale che può essere rappresentato, ad esempio, ponendo in ogni punto P di coordinate

(t_P, u_P) il vettore di componenti $dt = 1$ e $du = f(t_P, u_P)$. Tale campo vettoriale risulta essere tangente nel punto considerato a una curva soluzione del problema (1.1). Infatti, l'integrale generale del problema è dato da una famiglia di soluzioni che dipende da un parametro, una costante arbitraria, e il dato iniziale serve a selezionare una soluzione particolare. La figura 1.1 mostra un esempio di campo vettoriale definito da una equazione differenziale scalare del primo ordine.

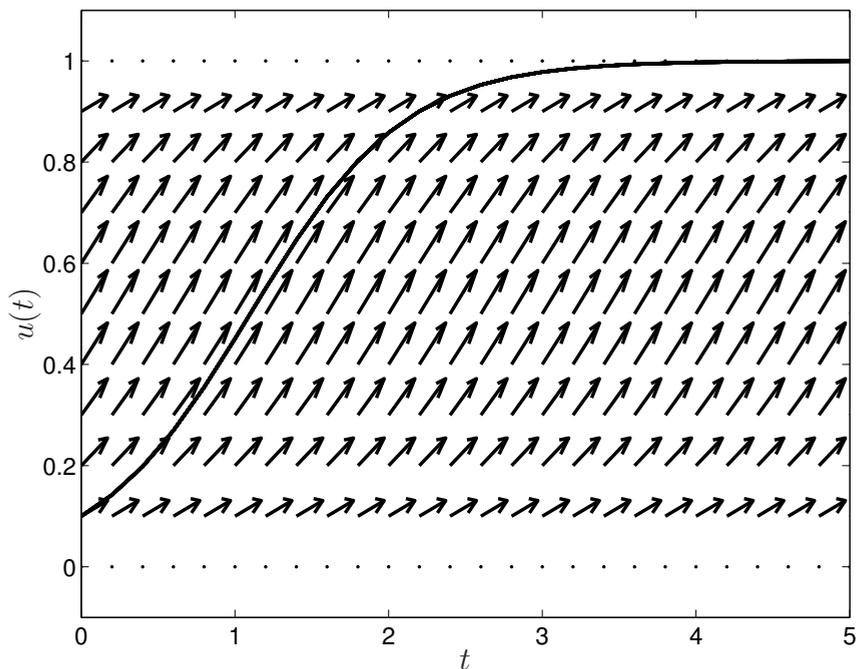


Figura 1.1: Campo vettoriale definito dall'equazione logistica per $p = 2$. La linea continua è la soluzione esatta per $u_0 = 0.1$.

Problema 2 Consideriamo un modello per la velocità di un sommergibile nel quale la resistenza dell'acqua si assume essere proporzionale

al quadrato della velocità stessa, si veda [37, pp. 124-125].

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -p u^2 \\ u(0) &= u_0 , \end{aligned} \tag{1.8}$$

dove p e u_0 sono valori positivi assegnati. Il parametro p è il rapporto fra la resistenza dovuta all'acqua, che varia al variare della forma del sottomarino, e la massa del sottomarino stesso. Il problema (1.8) ha la soluzione esatta

$$u(t) = \frac{u_0}{1 + p u_0 t} . \tag{1.9}$$

Il motivo dell'importanza dei modelli differenziali nelle scienze e nell'ingegneria si deve al fatto che tali modelli sono a fondamento delle leggi della natura. La piú famosa di tali leggi è di certo il secondo principio di Newton della meccanica classica. Sia $u(t)$ la posizione di un punto materiale di massa m che si muove sottoposto ad una forza F su una traiettoria prestabilita, il secondo principio di Newton ha in questo caso la forma:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u}{dt^2} &= F \left(t, u, \frac{du}{dt} \right) , \\ u(0) &= u_0 , \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0 , \end{aligned} \tag{1.10}$$

dove u_0 e v_0 sono i dati iniziali assegnati. Questo problema ai valori iniziali è del secondo ordine e non lineare se la forza dipende non linearmente dalla posizione o dalla velocità. Posto $u_1 = u$ e $u_2 = du/dt$, il problema (1.10) si può riscrivere come sistema del primo ordine

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 , \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{m} F(t, u_1, u_2) , \\ u_1(0) &= u_0 , \quad u_2(0) = v_0 . \end{aligned} \tag{1.11}$$

Il sistema (1.11) si può porre nella forma vettoriale (1.1) definendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ con $f_1 = u_2$ e $f_2 = F(t, u_1, u_2)/m$, e $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)^T$. Qui e nel seguito con la notazione $(\cdot, \dots, \cdot)^T$ indichiamo il vettore trasposto del vettore dato.

Problema 3 *L'oscillatore di van der Pol è un modello sviluppato al fine di descrivere il comportamento non lineare dei circuiti a tubi catodici agli inizi degli sviluppi dell'era elettronica. Lo schema del circuito fu disegnato e realizzato da Balthasar van der Pol negli anni 20 del secolo scorso [50]. Il modello di van der Pol, nella sua forma considerata standard, è dato da*

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= \epsilon (1 - u^2) \frac{du}{dt} - u, \\ u(0) &= u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

dove u_0 e v_0 sono i dati iniziali e ϵ è un parametro positivo assegnato.

Come sappiamo, il problema (1.12) si può riscrivere come sistema del primo ordine

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \epsilon (1 - u_1^2) u_2 - u_1, \\ u_1(0) &= u_0, \quad u_2(0) = v_0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Il sistema (1.13) si può riscrivere nella forma vettoriale (1.1) definendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ con $f_1 = u_2$ e $f_2 = \epsilon(1 - u_1^2)u_2 - u_1$, e $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)^T$.

Nel seguito, per motivi di semplicità di esposizione, consideriamo il caso scalare $d = 1$, la notazione vettoriale sarà riservata solo dove essa risulta essere necessaria. In genere, i vari metodi si possono estendere al caso dei sistemi applicandoli componente per componente. Dobbiamo, comunque, notare che i metodi di Runge-Kutta rappresentano

una notevole eccezione a questo modus operandi. Infatti, per ordini di accuratezza superiore a quattro si hanno dei metodi di Runge-Kutta che sono di un certo ordine nel caso scalare mentre l'ordine si riduce se vengono applicati a dei sistemi di equazioni differenziali.

1.2 Metodi numerici

Assegnato un problema ai valori iniziali spesso non è possibile scrivere la sua soluzione in forma chiusa, utilizzando le funzioni elementari. Risulta allora utile avere a disposizione dei metodi numerici che permettano di approssimare la soluzione del problema utilizzando esclusivamente l'equazione differenziale e il dato iniziale assegnato. I moderni solutori per i problemi ai valori iniziali usano tre elementi:

1. un metodo numerico;
2. un modo per stimare l'errore della soluzione numerica;
3. un meccanismo per definire il passo di integrazione.

Iniziamo con il considerare i metodi numerici e a tal fine introduciamo i reticoli e le funzioni di reticolo.

1.2.1 Reticoli e funzioni di reticolo

Un reticolo, definito nell'intervallo $[a, b]$, è un insieme di nodi $\{t_k\}_{k=0}^K$ che verificano le disequaglianze seguenti

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{K-1} < t_K = b, \quad (1.14)$$

con i rispettivi passi definiti da

$$h_k = t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (1.15)$$

La finezza del reticolo è definita con

$$|h| = \max_{0 \leq k \leq K-1} h_k. \quad (1.16)$$

Se $h_i = (b - a)/K$ per $i = 0, 1, \dots, K - 1$, chiameremo (1.14) un reticolo uniforme, in caso contrario avremo un reticolo non-uniforme. Una funzione $w = \{w_k\}$ (con $w_k \in \mathbb{R}$) definita sul reticolo (1.14) è detta funzione di reticolo se interpretiamo il valore w_k come il valore della funzione w al nodo t_k . Ogni funzione $w(t)$ definita in $[a, b]$ induce una funzione di reticolo per restringimento. La notazione $\Gamma_h[a, b]$ indica l'insieme delle funzioni di reticolo su $[a, b]$, e per ogni funzione di reticolo $w = \{w_k\}$ definiamo la sua norma come

$$\|w\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq K} |w_k|, \quad w \in \Gamma_h[a, b]. \quad (1.17)$$

Un metodo numerico definisce una funzione di reticolo $\{u_k\}$ tale che $u_k \approx u(t_k)$ dove $\{u(t_k)\}$ indica la funzione di reticolo indotta dalla soluzione esatta $u(t)$ del problema differenziale. Introduciamo in I un reticolo con sotto-intervalli di ampiezza variabile h_k , per $k = 1, 2, \dots, n$, dove chiameremo nodi la sequenza di punti $t_k = t_0 + \sum_{j=0}^{k-1} h_j$, per $k = 0, 1, 2, \dots, K$, ed indicheremo con u_k l'approssimazione numerica di $u(t_k)$ nel nodo t_k ottenuta applicando un metodo numerico al problema ai valori iniziali (1.1) con $d = 1$.

In questo capitolo useremo reticolo di sotto-intervalli di ampiezza costante h con nodi $t_k = t_0 + kh$, per $k = 0, 1, 2, \dots, K$, i reticoli a passo variabile verranno considerati nel capitolo 3 insieme alle stime dell'errore locale di troncamento della soluzione numerica e alle strategie per variare il passo di integrazione.

1.3 I metodi di Eulero e dei trapezi

Come sappiamo, si veda ad esempio Fazio [21, pp. 108-117], formule numeriche per la derivata prima si deducono dalla formula di Taylor. In particolare possiamo avere una *differenza finita in avanti*

$$\frac{du}{dt}(t_k) = \frac{u_{k+1} - u_k}{h} + O(h). \quad (1.18)$$

Qui e nel seguito la notazione $O(h^p)$ con p intero positivo (si legge anche O-grande di p) indica l'ordine di accuratezza della formula o del metodo. In alternativa a questa differenza in avanti consideriamo un'altra formula dello stesso ordine, cioè una *differenza finita all'indietro*

$$\frac{du}{dt}(t_{k+1}) = \frac{u_{k+1} - u_k}{h} + O(h) . \quad (1.19)$$

E, infine, possiamo considerare una *differenza finita centrale*

$$\frac{du}{dt}(t_k) = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} + O(h^2) . \quad (1.20)$$

Sul reticolo introdotto in I useremo la notazione $f_k = f(t_k, u_k)$. Sostituendo nell'equazione differenziale (1.1) la differenza finita in avanti (1.18) otteniamo il metodo di Eulero esplicito

$$u_{k+1} = u_k + hf_k \quad \text{Eulero in avanti;} \quad (1.21)$$

che ha un errore locale di troncamento dell'ordine $O(h^2)$. Se, invece, usiamo la formula alle differenze finite all'indietro (1.18) otteniamo il metodo di Eulero implicito

$$u_{k+1} = u_k + hf_{k+1} \quad \text{Eulero all'indietro;} \quad (1.22)$$

con lo stesso errore locale dell'ordine $O(h^2)$. Applicando la differenza finita centrale si ottiene il metodo del punto medio

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf_k \quad \text{metodo del punto medio;} \quad (1.23)$$

con un errore locale dell'ordine $O(h^3)$. Infine, il metodo dei trapezi o di Crank-Nicolson

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}) \quad \text{metodo dei trapezi;} \quad (1.24)$$

che, come vedremo nell'esercizio 1.3, ha un errore locale dell'ordine $O(h^3)$ si ottiene sommando membro a membro i due metodi di Eulero (1.21) e (1.22) e dividendo per due. Naturalmente, il metodo dei trapezi che è implicito, richiede la soluzione di una equazione, un sistema nel caso che $d > 1$, non lineare ad ogni passo di integrazione, si veda l'esercizio 1.4.

1.4 Proprietà dei metodi numerici

I metodi numerici per la soluzione di problemi ai valori iniziali si differenziano in relazione ai criteri seguenti:

1. Il carattere esplicito o implicito delle equazioni algebriche;
2. Metodi ad un passo o a più passi (metodi multi-passo);
3. La consistenza e l'ordine dell'errore locale di troncamento del metodo.
4. La stabilità del metodo;
5. La convergenza del metodo.

In particolare:

1. Un metodo si dice esplicito se il valore u_{k+1} è definito solo da valori noti della soluzione. Ad esempio sono metodi espliciti il metodo di Eulero in avanti e il metodo del punto medio. Un metodo si dice implicito se u_{k+1} compare anche come argomento di $f(\cdot, \cdot)$. Ad esempio sono metodi impliciti il metodo di Eulero all'indietro e il metodo dei trapezi.
2. Il coinvolgimento del valore della soluzione in due o più nodi definisce i metodi ad un passo o a più passi. I metodi di Eulero sono ad un passo; invece il metodo del punto medio è a più passi. I metodi a più passi necessitano dei valori ottenuti con un metodo ad un passo per il calcolo della soluzione nei nodi intermedi successivi al valore iniziale e necessari per inizializzare il metodi multi-passo.
3. L'errore locale di troncamento R_k al nodo t_k corrisponde all'errore introdotto nell'approssimare la derivata mediante una formula di Taylor. Tale errore è una misura di quanto la soluzione esatta

del problema ai valori iniziali non verifica il metodo numerico. Un metodo è di ordine p se il suo errore locale è un $O(h^{p+1})$. Un metodo è consistente se è almeno del primo ordine. I metodi di Eulero sono del primo ordine; invece i metodi del punto medio e di Crank-Nicholson sono del secondo.

4. Un metodo si dice stabile se a ‘piccole’ perturbazioni sul valore iniziale o sui valori di $f(\cdot, \cdot)$ corrispondono ‘piccole’ variazioni della soluzione. Chiariremo nel seguito il concetto intuitivo dato di stabilità.
5. **Definizione 1** *Definiamo con errore globale la funzione di reticolo*

$$e_k = |u(t_k) - u_k| ,$$

dove $u(t_k)$ e u_k vanno intese come funzioni di reticolo.

Definizione 2 *Un metodo si dice convergente rispetto a h se*

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_k \rightarrow 0 . \tag{1.25}$$

cioè, se la soluzione numerica converge alla soluzione analitica e l'errore globale tende a zero al tendere a zero del passo di integrazione.

Consideriamo degli esempi di applicazione dei metodi numerici introdotti. Come primo esempio riportiamo l'applicazione del metodo di Eulero esplicito al modello della crescita logistica (1.6) con parametro $p = 2$ e dato iniziale $u_0 = 0.1$. La figura 1.2 mostra i risultati numerici. Come si vede da questa figura, la scelta del passo di integrazione è di fondamentale importanza nella risoluzione numerica dei problemi ai valori iniziali. Nel caso $K = 4$ si può notare che l'errore globale del metodo non è dato dalla somma degli errori locali ma dipende

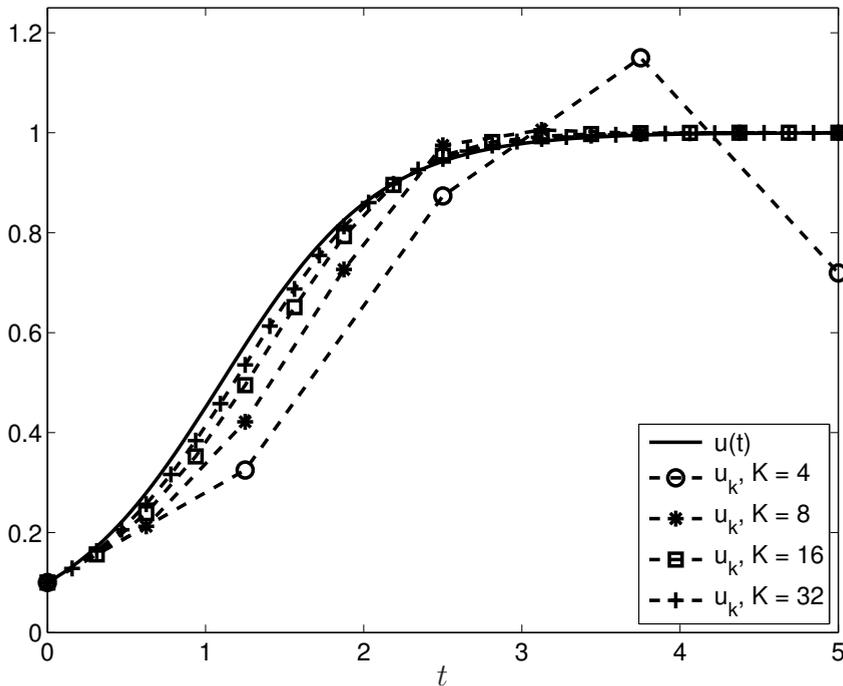


Figura 1.2: Soluzioni numeriche del problema (1.6) con $p = 2$ e $u_0 = 0.1$, metodo di Eulero esplicito (1.21) per valori diversi di K .

anche dal comportamento della soluzione. Nell'esempio considerato entrambi gli errori si riducono al crescere di K .

Come secondo esempio, volto a confrontare diversi metodi, applichiamo i quattro metodi introdotti al problema (1.8) con parametro $p = 1$ e condizione iniziale $u_0 = 1$. La figura 1.3 mostra i risultati numerici. Poiché l'unica forza agente sul sottomarino è la resistenza dell'acqua, ci aspettiamo che la soluzione analitica del problema ai valori iniziali, cioè la velocità del sottomarino, assegnato il valore iniziale, tenda a zero mantenendosi positiva. Per i metodi di Eulero e dei trapezi scegliamo $h = 0.5$, mentre per il metodo del punto medio usiamo $h = 0.1$. La soluzione esatta del problema è disegnata con una

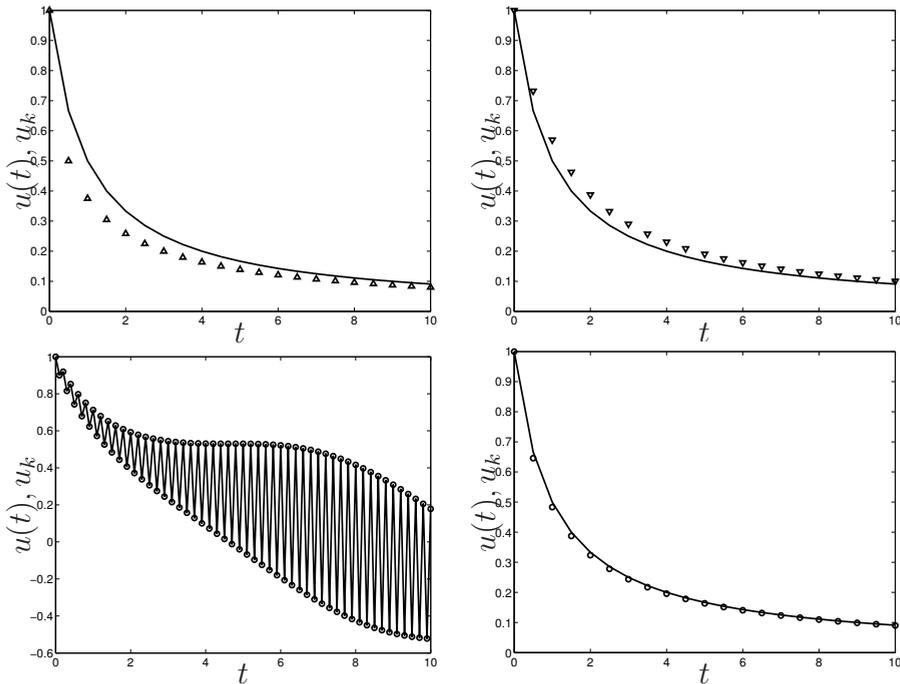


Figura 1.3: Soluzioni numeriche di (1.8) con $p = 1$. In alto a sinistra: Eulero esplicito (1.21), in alto a destra: Eulero implicito (1.22), in basso a sinistra: metodo del punto medio (1.23), e in basso a destra: metodo dei trapezi (1.24).

linea continua. Il metodo del punto medio è un metodo a due passi e quindi al primo passo possiamo usare il metodo di Eulero esplicito al fine di ottenere il valore di u_1 . Come dimostreremo in seguito, l'errore globale commesso resta del secondo ordine se usiamo un metodo di ordine uno in un solo passo e poi applichiamo un metodo di ordine due. Come si vede, pur avendo usato un passo di integrazione notevolmente più piccolo, il metodo del punto medio ha una soluzione numerica che non riproduce il comportamento qualitativo della soluzione esatta del problema. Come vedremo in seguito, il motivo per questo tipo di soluzioni numeriche, completamente errate, è legato al concetto di

Bibliografia

- [1] U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij, and R. D. Russell. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [2] U. M. Ascher and L. R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [3] E. Barbin, J. Borowczyk, J. Chambert, M. Guillemot, A. Michel-Pajus, L. C. Bernard, A. Djebbar, and J. Martzloff. *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*. Springer, Berlin, 1999.
- [4] H. Blasius. Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.*, 56:1–37, 1908.
- [5] C. J. Budd, B. Leimkuhler, and M. D. Piggott. Scaling invariance and adaptivity. *Appl. Numer. Math.*, 39:261–288, 2001.
- [6] C. J. Budd and M. D. Piggott. The geometric integration of scale invariant ordinary and partial differential equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 128:399–422, 2001.
- [7] R. Bulirsch and J. Stoer. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. *Num. Math.*, 8:1–13, 1966.

-
- [8] J. C. Butcher. *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Runge-Kutta and General Linear Methods*. Wiley, Chichester, 1987.
- [9] J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, Chichester, 2003.
- [10] C. W. Cryer. On the instability of high order backward-difference multistep methods. *BIT*, 12:17–25, 1972.
- [11] C. F. Curtiss and J. O. Hirschfelder. Integration of stiff equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38:235–243, 1952.
- [12] G. Dalquist. A special stability problem for linear multistep methods. *BIT*, 3:27–43, 1963.
- [13] K. Dekker and J. G. Verwer. *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [14] J. R. Dormand and P. J. Price. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J. Comput. Appl. Math.*, 6:19–26, 1980.
- [15] C. H. Edwards and D. E. Penney. *Differential Equations and Boundary Value Problems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [16] W. H. Enright. A new error-control for initial value solvers. *Appl. Math. Comput.*, 31:588–599, 1989.
- [17] W. H. Enright. Continuous numerical methods for ODEs with defect control. *J. Comput. Appl. Math.*, 125:159–170, 2000.
- [18] V. M. Falkner and S. W. Skan. Some approximate solutions of the boundary layer equations. *Philos. Mag.*, 12:865–896, 1931.
- [19] L. V. Fausett. *Applied Numerical Analysis Using MATLAB*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.

-
- [20] R. Fazio. Stiffness in numerical initial-value problems: A and L-stability of numerical methods. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 32:752–760, 2001.
- [21] R. Fazio. *Laboratorio di Analisi Numerica*. Aracne, Roma, 2010.
- [22] E. Fehlberg. Classical fifth-, sixth-, seventh- and eighth order formulas with step size control. *Computing*, 4:93–106, 1969.
- [23] L. Fox. *Numerical Solution of Two-point Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Clarendon Press, Oxford, 1957.
- [24] W. Gautschi. *Numerical Analysis. An Introduction*. Birkhauser, Boston, 1997.
- [25] C. W. Gear. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1971.
- [26] H. H. Goldstine. *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [27] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. Geometrical numerical integration illustrated by the Stormer-Verlet method. *Acta Numerica*, 12:399–450, 2003.
- [28] E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner. *Solving Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer, Berlin, 1987.
- [29] E. Hairer and G. Wanner. On the instability of BDF formulas. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20:285–303, 1983.
- [30] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer, Berlin, 1991.
- [31] M. H. Holmes. *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*. Springer, Berlin, 2007.

-
- [32] A. Iserles. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [33] A. Jannelli and R. Fazio. Adaptive stiff solvers at low accuracy and complexity. *J. Comput. Appl. Math.*, 191:246–258, 2006.
- [34] H. B. Keller. *Numerical Methods for Two-point Boundary Value Problems*. Dover Publications, New York, 2nd edition, 1992.
- [35] M. W. Kutta. Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46:435–453, 1901.
- [36] J. D. Lambert. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*. Wiley, Chichester, 1991.
- [37] C. R. MacCluer. *Industrial Mathematics. Modeling in Industry, Science, and Government*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [38] T. Y. Na. *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*. Academic Press, New York, 1979.
- [39] S. G. Nash. *A History of Scientific Computing*. ACM Press, New York, 1990.
- [40] G. Prodi. *Analisi Matematica*. Boringhieri, Torino, 1970.
- [41] C. Runge. Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46:167–178, 1895.
- [42] B. C. Sakiadis. Boundary-layer behaviour on continuous solid surfaces: I. Boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow. *AIChE J.*, 7:26–28, 1961.

-
- [43] B. C. Sakiadis. Boundary-layer behaviour on continuous solid surfaces: II. The boundary layer on a continuous flat surface. *AIChE J.*, 7:221–225, 1961.
- [44] D. Sarafyan. Error estimation for Runge-Kutta methods through pseudoiterative formulas. Techn. Rep. No 14, Louisiana State Univ., New Orleans, 1966.
- [45] L. F. Shampine. Error estimates and control for ODEs. *J. Sci. Comput.*, 25:3–16, 2005.
- [46] L. F. Shampine and A. Witt. A simple step size selection algorithm for ODE codes. *J. Comput. Appl. Math.*, 58:345–354, 1995.
- [47] L.F. Shampine. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Chapman & Hall, New York, 1994.
- [48] A. Stuart and A. R. Humphries. *Dynamical Systems and Numerical Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [49] E. Süli and D. F. Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [50] B. van der Pol. On relaxation oscillations. *Phil. Mag. Ser. 7*, 2:978–992, 1926. Reproduced in: B. van der Pol, Selected Scientific Papers, vol. I, North Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1960.
- [51] J. M. Verner. Explicit Runge-Kutta methods with estimates of the local truncation error. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:772–790, 1978.
- [52] J. Wisdom and M. Holman. Symplectic maps for the n-body problem. *Astron. J.*, 102:1528–1538, 1991.